Universidade de Lisboa

Aprendizagem do conceito de Limite: um estudo envolvendo alunos do 11.º ano do Ensino Secundário

Fernando Manuel Martins Capelo Mendes

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos e coorientado pela Professora Doutora Maria Antónia Lopes Duffner Bessa Monteiro

abril 2021

Universidade de Lisboa

Aprendizagem do conceito de Limite: um estudo envolvendo alunos do 11.º ano do Ensino Secundário

Fernando Manuel Martins Capelo Mendes

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos e coorientado pela Professora Doutora Maria Antónia Lopes Duffner Bessa Monteiro

abril 2021

propositadamente em branco

Resumo

O presente estudo foi realizado no âmbito da prática de ensino supervisionado e teve por base a lecionação de seis aulas de 90 minutos, numa turma de 11.º ano do ensino secundário da Escola Secundária Padre Alberto Neto (ESPAN), integrada no Agrupamento de Escolas Queluz-Belas, abrangendo o tema Limites de Funções Reais de Variável Real, no domínio Funções Reais de Variável Real.

O estudo teve como objetivo fundamental compreender como alunos do 11.º ano do Ensino Secundário aprendem e aplicam o conceito de limite, bem como as principais dificuldades que denotam em termos de ensino-aprendizagem. Para tal, foram formuladas as seguintes questões a que se procuraram dar resposta: Qual o significado do conceito de limite que os alunos apresentam ao longo do estudo? Com que conflitos cognitivos inibidores ou perturbadores da correta apreensão do conceito se confrontam alguns alunos? Como mobilizam os alunos o conceito de limite na resolução de tarefas? Quais as principais dificuldades evidenciadas pelos alunos?

As conclusões do trabalho estão suportadas numa análise qualitativa dos dados recolhidos. Para o acervo de informação, recorreu-se à recolha de documentos escritos produzidos pelos alunos, à observação do trabalho dos alunos durante a resolução das tarefas propostas, com recurso a notas de campo, e à realização de algumas entrevistas, sendo estas duas últimas acompanhadas com registo áudio.

O estudo confirma as dificuldades descritas na literatura sobre a aprendizagem do conceito de limite e a tendência dos alunos para se apropriarem de uma interpretação procedimental do conceito, sem previamente terem alcançado e consolidado a sua compreensão formal. Esta compreensão procedimental é suficiente para responder com sucesso a muitos exercícios de aplicação, ficando aquém da compreensão relacional, estruturação essencial ao entrosamento do conceito com outros domínios, seja da Matemática ou de outras ciências. Para o professor, o principal desafio é selecionar e preparar tarefas que promovam a comunicação sobre o tema, permitindo desse modo identificar obstáculos cognitivos à correta apreensão do conceito de limite pelos alunos e, ao mesmo tempo, sejam desafiantes e motivadoras para a turma, ilustrando sempre que possível a utilidade do conceito na resolução de problemas do mundo real.

Palavras-Chave: Limite de uma função, Conflitos cognitivos inibidores para a compreensão do conceito de limite, Dificuldades dos Alunos, Ensino Secundário.

Abstract

The current study was carried out within the scope of a supervised teaching practice. It was based on the work developed while teaching six lessons of 90 minutes, in a 11th grade class of high school education at Escola Secundária Padre Alberto Neto (ESPAN) and it encompassed the subject Limits of Real Functions of Real Variable, in the realm of Real Functions of Real Variable.

The main objective of this study was to understand how 11th grade students learn and use the concept of limit as well as the problems they reveal in terms of the teaching-learning process. Therefore, answers were sought for the following questions: Which meaning of concept of limit do students reveal throughout the teaching unit? Which cognitive conflicts that inhibit or hinder the correct apprehension of the concept do some students face? How do the students use the concept of limit in task-solving situations? How do students use the notion of limit in solving tasks that involve it? What are the main difficulties shown by the students?

The results presented are based on a qualitative analysis of the data collected throughout the teaching unit. This information collection resulted from the students' written productions in the tasks proposed in class, supported by direct observation and field notes complemented with audio recordings of some interviews done.

The study corroborates the difficulties described in papers about learning the concept of limit as well as students' tendency to seize a procedural interpretation of the concept without having first reached and mastered its formal understanding. This procedural understanding is enough to solve many application exercises successfully, but it is far less than enough for the relational understanding, which is essential when relating the concept to other areas of Maths or science.

Finally, the main challenge for the teacher is to select and prepare tasks that not only promote communication on the topic (thus enabling the identification of cognitive obstacles to a correct apprehension of the concept of limit by the students), but are simultaneously challenging and motivating for the class and point out the usefulness of the concept to solve real world problems.

Keywords: Limit of a function, Cognitive conflicts inhibitors of the understanding of the concept of limit, Students' difficulties, High School Education.

Dedicatória

À minha Mulher…

…que me concedeu 'O Tempo' para este estudo.

"Only two things are infinite, the universe and human stupidity, and I'm not sure about the former"

Albert Einstein (1879-1955)

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, um obrigado pelas suas orientações, críticas construtivas e frontalidade. Por toda a paciência, apoio e dedicação.

À minha coorientadora, Professora Doutora Maria Antónia Lopes Duffner Bessa Monteiro, um obrigado pelo seu apoio e motivação, bem como pelos conselhos respeitantes ao formalismo matemático das minhas aulas e na redação do presente relatório.

Ao professor cooperante, Paulo Alvega, o meu bem-haja pelo apoio, pelos conselhos experientes e ponderados, pela motivação que sempre me transmitiu, pela confiança que depositou em mim e no meu trabalho, pela disponibilidade permanente em ajudar e, acima de tudo, pela amizade. A sua experiência, dedicação e verdadeira paixão pelo ensino e pelos alunos, ajudou a consolidar a minha convicção no papel insubstituível do professor na construção do futuro da sociedade moderna. Constituiu uma motivação e estímulo importante à minha participação ativa em projetos na área da educação em geral e da matemática em particular, o que me proponho fazer a breve prazo.

Um agradecimento também a todos os meus colegas da turma de mestrado, em especial àqueles com quem mais privei em trabalhos de grupo, algumas vezes fora de horas. O presente trabalho teria, porém, sido impossível sem o companheirismo e apoio permanente do Francisco Aidos. Fizemos em conjunto o percurso de acompanhamento de duas turmas de matemática na Escola Secundária Padre Alberto Neto. O que começou por ser uma sã camaradagem com permanente entreajuda, terminou numa amizade que perdurará no tempo. Sem a persistência e entusiasmo do Francisco, ter-me--ia sido difícil terminar esta longa tarefa. Com ele foi fácil ultrapassar todas as contrariedades, em especial as decorrentes da extrema dificuldade em conciliar a vida académica com um exigente e absorvente trabalho profissional. Muito obrigado camarada Francisco!

Como diz o povo, os últimos são os primeiros. A minha primeira motivação para a frequência deste mestrado e consequente conclusão do presente relatório, é a paixão pelo ensino da matemática, em particular aos mais jovens. Daí o meu grande agradecimento aos alunos das turmas 11.º C e 11.º E, pela forma como me receberam, colaboraram e sempre me apoiaram, não só nas aulas que lecionei, como no acompanhamento regular de cada turma durante todo o ano letivo. Fiquei sinceramente surpreendido com o comportamento e maturidade demonstrados por todos os alunos, sem qualquer exceção nem reserva. Foram simplesmente inexcedíveis. Desejo a todos muito sucesso, tanto a nível pessoal como académico e gostaria de no futuro ter notícias sobre a atividade que decidiram abraçar na vida profissional.

Índice Geral

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Capítulo 1 - Introdução

Este capítulo aborda as razões que motivaram a realização deste estudo sobre a aprendizagem do Conceito de Limite, com alunos do 11.º ano do ensino secundário, bem como a sua pertinência. A concluir, descrevem-se também o objetivo do trabalho e as principais questões formuladas.

Motivação e Pertinência do Estudo

O tema dos limites coloca um enorme desafio ao professor em termos didáticos. Exige aos alunos a mobilização bem consolidada de conhecimentos anteriores, principalmente nos domínios da Álgebra e da Lógica, precisamente as áreas da Matemática onde os estudantes normalmente apresentam mais dificuldades. Recordo aliás o momento em que aprendi limites como uma espécie de marco ou ponto de viragem no meu percurso no estudo da Matemática. Existe o antes e o depois dos limites. Para muitos dos meus colegas representou o início de um certo desencanto com a disciplina, regressão nos resultados de avaliação e até posterior decisão de enveredar por áreas de estudos onde a Matemática não fosse uma disciplina central. Considero que este choque se deve só em parte às características algo disruptivas do conceito relativamente às matérias anteriores. De facto, o conceito de limite, talvez por ser uma área relativamente recente na Matemática, recorre ainda a subtilezas de linguagem e a uma simbologia menos apelativa e consolidada, por comparação com o que sucede por exemplo com a Aritmética, Álgebra ou Geometria. É também a partir dos limites que os alunos passam a ser sistematicamente confrontados com a necessidade de se preocuparem em justificar e demonstrar as afirmações matemáticas. Estamos assim num momento de mudança qualitativa no percurso dos alunos no ensino secundário. Daí que o papel do professor em apoiar os alunos neste verdadeiro dobrar do ‘cabo das tormentas’ seja mais fundamental e crucial que nunca. Ora é aqui precisamente que me parece estar o desafio. Penso que os professores nem sempre se apercebem ou adotam uma atitude diferente perante o início do percurso dos alunos pelo cálculo diferencial e integral. Constatei aliás, algumas vezes, precisamente o oposto. São os próprios professores a incutir nos alunos preconceitos relativamente ao que aí vem: limites, continuidade, derivadas, primitivas e integrais. Um verdadeiro ‘Mostrengo’ do ensino secundário, a que poucos conseguirão resistir. E a profecia autorrealizável não poderia deixar de se cumprir, como talvez aconteça na maioria das vezes, na matemática como na vida.

No entanto, é muito difícil não valorizar a importância da noção de limite na Matemática em geral, no cálculo em particular e nas mais diversas áreas científicas (Zollman, 2014). Ela está na base do Cálculo Diferencial e Integral, omnipresente em todas as áreas da ciência, desde as Engenharias até à Medicina, passando pelas Ciências Sociais como Psicologia, Sociologia e Ciência Política. Boa parte do estudo científico baseia-se na construção e aperfeiçoamento de modelos que aproximem a realidade, cuja exploração e dinâmica obedece a regras matemáticas fundadas no conceito de limite. Desta forma, uma apreensão incorreta ou incompleta do conceito pode levar a limitações na interpretação de resultados científicos ou mesmo a erros de formulação e modelação. É assim uma âncora muito importante na aprendizagem do cálculo, em especial para os alunos que prossigam os seus estudos na universidade. Este é talvez o principal motivo da escolha do tema para este trabalho. A forma como os alunos percecionam o conceito de limite na sua primeira abordagem no ensino secundário, condiciona fortemente o modo como mais tarde, já no ensino superior, lidam com novos desenvolvimentos e aplicações da noção de limite a todas as áreas da matemática. É por isso muito importante que, no ensino secundário, a aprendizagem de limites não contribua para criar, alimentar ou acentuar bloqueios e conflitos conceptuais, muito difíceis de diagnosticar e desmontar mais tarde.

Embora suspeita, por se tratar de um manual de cálculo, subscrevo a seguinte afirmação sobre a relevância do estudo dos limites na matemática em geral e no cálculo em particular: “Sem limites, o cálculo simplesmente não existe. Cada noção em cálculo é um limite, num sentido ou noutro” (“Without limits calculus simply does not exist. Every single notion of calculus is a limit in one sense or another”) (Salas, Hille, & Etgen, 2007, p. 53). Se complementarmos a afirmação acima com a opinião de que, a par com a criação da geometria euclidiana, o Cálculo tem demonstrado ser o conceito mais original e profícuo em matemática (Kline, 1959), é difícil não sobrestimar a relevância e centralidade do conceito de limite, não só na matemática, mas em toda a ciência.

O tema pode também ser abordado de outras perspetivas, igualmente interessantes. Apesar da complexidade intrínseca do conceito (pelo menos pela forma inovadora, para os alunos, como é abordado), existem situações de bons alunos a matemática que demonstram não o ter apreendido corretamente. Ou seja, não é raro alunos que são exímios na álgebra de limites, resolvendo com êxito inúmeros exercícios e apresentando bons resultados na avaliação sumativa, manifestarem insuficiências quando confrontados com questões mais especializadas onde se pretende verificar se dominam os meandros e subtilezas do conceito de limite (Cornu, 2002). Não sendo um cenário exclusivo dos limites, acho muito curioso, precisamente por se verificar numa área onde aparentemente esta dicotomia teoria-prática pareceria mais improvável.

Um estudo interessante sobre o entendimento que os estudantes constroem sobre o conceito de limite, mostrou algumas confusões frequentes, como por exemplo (William, 1991):

- Limite é um valor que uma função pode atingir;
- Limite é uma fronteira;
- Limite como processo dinâmico ou um objeto estático;
- Limite está intimamente ligado ao conceito de movimento.

Para o mesmo autor, qualquer das perceções acima conduzem a uma conceção incompleta do conceito de limite. Este entendimento informal do conceito é identificado com a interpretação comum do mesmo antes da definição rigorosa dada por Cauchy, no primeiro quartel do século XIX.

Existe um consenso bastante alargado de que muitas das dificuldades demonstradas pelos alunos em matérias como continuidade, diferenciação e integração, radicam efetivamente numa compreensão deficiente do conceito de limite (Denbel, 2014).

A aprendizagem sobre limites concentra-se frequentemente na resolução algébrica de exercícios propostos aos alunos, implicando pouco mais que a mobilização e aplicação de procedimentos pré-enunciados e o recurso a um conjunto de teoremas sobre o tema. Este receituário é amiúde suficiente para o sucesso académico dos estudantes, mas tem consequências. Um estudo envolvendo alunos de engenharia após terem concluído disciplinas de cálculo e análise em que o conceito de limite foi apresentado e explorado, mostrou terem melhor desempenho na resolução de problemas práticos onde apenas era exigido que aplicassem procedimentos que tinham aprendido. Pelo contrário, denotaram enorme dificuldade quando confrontados com desafios mais exigentes, fora dos contextos a que estavam habituados, embora exigindo a aplicação do conceito de limite (Quezada, 2019). O estudo chama a atenção não só para a necessidade de os curricula contemplarem resolução de problemas da vida real, mas igualmente para o estímulo da criatividade e desenvolvimento de estratégias inovadoras de abordagem de questões não convencionais.

O conceito de limite tem assim o aliciante de ser simultaneamente complexo e fundamental. Ainda que seja possível contornar essa complexidade no ensino secundário, isso é indesejável, pois vai certamente colocar dificuldades acrescidas aos alunos no ensino superior. Há mesmo autores que o consideram um dos maiores obstáculos com que se deparam os estudantes no ensino superior (Zollman, 2014). Este autor acrescenta que um conceito inadequado de limite, para além de ser inconsistente com a definição formal, acaba por se revelar inadequado também na resolução de problemas.

Considero que boa parte do sucesso dos alunos na apreensão do conceito de limite depende da aposta do professor de que isso é possível. Este tem de ter especial atenção a cada elemento do seu discurso em sala de aula. Sendo indubitável que o conhecimento profundo do tema seja fundamental, isso não é suficiente para o comunicar aos alunos. Eis algumas sugestões para tornar o discurso do professor mais transparente e aumentar a comunicação entre todos na sala de aula (Güçler, 2012):

- Tornar o discurso matemático em aula explícito para os alunos. Explicar os critérios para a escolha de tarefas, mediadores visuais, termos utilizados e rotinas em sala de aula;
- Ser consistente na comunicação com a turma;
- Explorar as dificuldades manifestadas pelos estudantes nos diversos tópicos abordados em aula. Estar atento às assunções e metáforas incorretas que estão na base daquelas dificuldades. Selecionar problemas atípicos direcionados a evidenciar os obstáculos à aprendizagem e discutir com os alunos a razão dessa escolha;
- Incentivar e dar oportunidade aos alunos para comunicarem as suas ideias matemáticas a toda a turma.

Esta foi outra motivação importante para este estudo sobre limites. Não é suficiente ao professor gostar do tema e dominá-lo do ponto de vista técnico. Nem tão pouco adotar estratégias didáticas e pedagógicas especialmente concebidas para o tema. O professor tem de conseguir aceder ao discurso matemático dos alunos e, simultaneamente, avaliar até que ponto o seu próprio discurso está a ser efetivo no impacto junto da turma (Güçler, 2012).

A ideia de limite marca, no ensino secundário, o início de uma transição para um nível superior de pensamento matemático, a que David Tall chama 'advanced mathematical thinking':

> Embora o conceito de função seja central na matemática moderna, é o conceito de limite que expressa uma mudança para um nível superior de pensamento matemático. (…) este é o primeiro conceito matemático com que os estudantes são confrontados em que o resultado não pode ser alcançado através de um cálculo matemático direto. Em vez disso, o resultado está 'rodeado de mistério', sendo alcançado 'sempre por um caminho tortuoso'. (Tall, 1992a, p.11)

Mesmo desconsiderando o papel dos limites em áreas da matemática transversais a todas as ciências como a diferenciação e o cálculo integral, é indesmentível que a aprendizagem do conceito de limite no ensino secundário constitua um momento de forte apelo à estruturação do pensamento, desenvolvimento do raciocínio abstrato, modelação e aplicação da matemática ao mundo real, finalidades explicitadas nas metas curriculares para este nível de ensino (ME, 2013). É também no domínio dos limites que os alunos começam a ser interpelados de forma sistemática com a necessidade de 'provar/demonstrar', 'justificar' e 'interpretar' os objetos e enunciados matemáticos a que recorrem na resolução das tarefas que lhes são propostas.

Tive o privilégio de ser aluno do Professor Doutor Jaime Campos Ferreira, em Análise Matemática. Recordo perfeitamente o comentário que usou para nos transmitir a importância dos limites em matemática. Referiu que, se fosse obrigado a usar um único critério para distinguir alunos no que concerne aos seus conhecimentos sobre Análise, escolheria a compreensão do conceito de limite. Na altura achei uma opção algo bizarra, mas ficou-me gravada na memória. Passaram muitos anos, a minha paixão e conhecimentos sobre matemática cresceram consideravelmente desde então. Não obstante, hoje subscreveria sem hesitar aquela afirmação.

Objetivo e Questões do Estudo

O objetivo deste estudo é procurar compreender como estudantes do 11.º ano do Ensino Secundário apreendem e aplicam o conceito de limite. O estudo incide principalmente sobre limites de funções reais de variável real, embora se abordem também limites de sucessões reais, uma vez que o programa de Matemática prescreve a definição de limite segundo Heine.

O estudo debate a distinção entre conceção formal e informal de limite, bem como explora a diferença entre imagem e definição conceptual de limite. Frequentemente as imagens conceptuais são individuais, incoerentes, afastam-se da definição formal e contêm fatores causadores de conflitos cognitivos (Tall & Vinner, 1981). Procurou-se confrontar os alunos com tarefas diversificadas onde eventuais conflitos cognitivos impeditivos de uma correta apreensão do conceito de limite pudessem ser evidenciados. São também apresentadas e discutidas possíveis estratégias para antecipar, minorar ou ultrapassar estes conflitos.

Nesta perspetiva apresentam-se, de seguida, algumas questões orientadoras equacionadas no presente estudo, para as quais se procuraram encontrar respostas que as clarifiquem ou apontem pistas para futuras pesquisas:

i. Qual o significado do conceito de limite que os alunos apresentam ao longo do estudo?

ii. Com que conflitos cognitivos inibidores ou perturbadores da correta apreensão do conceito de limite se confrontam alguns alunos?

iii. Como mobilizam os alunos o conceito de limite na resolução de tarefas? Quais as principais dificuldades que os alunos evidenciam?

Estes serão os assuntos centrais objeto de análise e discussão no presente trabalho. No entanto, antes de os abordar com algum detalhe, importa efetuar o enquadramento e descrever o contexto em que o estudo foi realizado. Será esse o propósito dos dois próximos capítulos.

Capítulo 2 – Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo apresentam-se as orientações curriculares para o ensino e aprendizagem do conceito de limite, bem como uma abordagem histórica que permita conhecer a sua origem e servir de enquadramento ao estudo que se pretende desenvolver. Serão referidos aspetos gerais relacionados com o cálculo e sua relação com o conceito de limite, bem como a importância do conceito de limite nos desenvolvimentos mais recentes do cálculo. O foco será a importância da noção de limite no ensino e aprendizagem da Matemática, não só no ensino secundário, mas nas suas implicações nos posteriores e mais complexos desenvolvimentos no ensino superior, independentemente de os alunos seguirem estudos superiores na área da matemática. Será por isso dada especial atenção às dificuldades demonstradas pelos alunos na compreensão e operação do conceito.

O Conceito de Limite

Provavelmente terá sido Isaac Newton (1642-1727) quem primeiro formulou o conceito de limite de uma forma muito próxima da que usamos hoje. De facto, na secção I do Livro Um da sua obra fundamental, Principia (Philosophie Naturalis Principia Mathematica, 1687), surge o seguinte texto (Katz, 2010, p.659):

LEMA 1 *Quantidades e ratios de quantidades, que num tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e que antes do fim desse tempo se tornam arbitrariamente próximas uma da outra, acabam por se igualar*.

A demonstração era óbvia. Se no fim as quantidades forem desiguais, diferem por um valor positivo D e, consequentemente, não se aproximam mais uma da outra do que D, uma contradição.

Newton usou o conceito de limite amiúde nas suas obras. Por exemplo a sua noção de velocidade instantânea, como um *ratio* de distância pelo tempo em que as duas quantidades evanescem (quer dizer, o quociente de dois infinitésimos – distância e tempo - tende para um valor a que chamamos hoje limite). Mas já na altura esta argumentação era considerada confusa e não rigorosa. Veja-se como Newton respondeu às críticas, com argumentos que poderiam perfeitamente ser retirados de um texto contemporâneo (excerto do *General Scholium*, secção I, notas adicionadas por Newton aos Principia):

> Talvez seja objetado que não exista uma proporção limite de quantidades infinitesimais; devido à proporção, antes das quantidades se terem extinguido, não é ainda limite, e depois de se extinguirem, nada existe. Mas com o mesmo argumento pode ser alegado que um corpo chega a determinado lugar, e que para aí, não tem velocidade limite; devido à velocidade, antes do corpo chegar ao local, não tinha a sua velocidade limite; quando chegou, não tinha nenhuma. Mas a resposta é fácil; por velocidade limite entende-se a velocidade com que o corpo se desloca, nem antes de chegar ao seu último local em que o movimento cessa, nem depois, mas no instante exato em que ele chega… E da mesma maneira, entende-se como *ratio* limite de quantidades infinitesimais o *ratio* das quantidades não antes de se extinguirem, nem depois, mas exatamente quando estão a extinguir-se… Há um limite que a velocidade no fim do movimento pode alcançar, mas não exceder. Esta é a velocidade limite. E existe um limite como este para todas as quantidades e proporções que comecem ou cessem de ser… (Katz, 2010, p.660)

Contemporâneo de Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) é considerado o fundador do cálculo diferencial e integral. A sua notação ainda hoje subsiste, quer para derivadas e infinitésimos, quer para integrais. Newton e Leibniz são por isso justamente considerados os inventores do cálculo.

Durante todo o século XVIII o conceito de limite foi sendo trabalhado e aperfeiçoado por matemáticos (e já não apenas filósofos, físicos ou naturalistas) como Colin Maclaurin (1698-1746), Jean-Baptiste D'Alembert (1717-1783) e Sylvestre Lacroix (1765-1843). Mas foi com Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), já no século XIX, que o conceito de limite foi definido com precisão e se tornou uma espécie de charneira de toda a análise matemática, estando na base de outros conceitos comuns na matemática contemporânea como continuidade, derivada, integral ou extensões do conceito de função.

Com Cauchy atingimos definitivamente o rigor analítico na definição de limite, dispensando qualquer motivação geométrica ou diagrama, como invariavelmente acontecera até aí. Em boa verdade, Euler, Lagrange e, mais tarde, Lacroix, já tinham ensaiado a separação da Análise relativamente à Geometria, mas foi no seu livro Cours d'Analyse (1821) que Cauchy acrescentou o rigor que hoje caracteriza a Análise Matemática. A sua definição de limite surge praticamente no início do tratado (Katz, 2010, p.913):

> Se os sucessivos valores atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de tal modo que difiram dele tão pouco quanto se queira, este último diz-se o **limite** de todos os outros.

Embora esta definição não seja coincidente com a definição moderna $\lim_{x \to a} f(x) = b$, envolvendo explicitamente duas variáveis diferentes, x e $f(x)$, Cauchy emprega-a profusamente na demonstração de inúmeros resultados sobre limites, onde faz uso de desigualdades (por exemplo no conceito de vizinhança) envolvendo tanto a variável dependente como a independente. Note-se que o conceito de função começou a ser largamente usado durante o século XIX (após a sua primeira utilização atribuída a Euler, 1734), mas só no último quartel do século teve a sua definição formal no âmbito da Teoria dos Conjuntos.

A definição de limite de uma função presentemente adotada no ensino secundário não é a proposta por Cauchy mas sim pelo alemão H. Eduard Heine (1821-1881). A definição de Heine, ao contrário da de Cauchy, baseia-se no conceito de limite de uma sucessão sendo, nessa perspetiva, mais intuitiva e espontânea, já que tradicionalmente o estudo do limite de sucessões precede o de funções na organização curricular da disciplina no ensino secundário. Fica também muito facilitada a demonstração dos principais teoremas sobre álgebra de limites de funções, remetendo sistematicamente para as demonstrações homólogas, mais simples, no âmbito das sucessões.

Não foi sempre assim. A abordagem segundo Cauchy já teve primazia no passado, talvez por ser, ainda hoje, a mais comum no ensino superior, onde as funções são objeto de estudo aprofundado e sistemático. Esta opção manteve-se inclusivamente após a 'Reforma Veiga Simão' (nome do ministro da educação que a implementou), ocorrida no início dos anos setenta do séc. XX, em que se acentuou a tendência então já em curso de privilegiar o ensino da chamada Matemática Moderna (novas metodologias e conteúdos). Ambas as definições de limite, Cauchy ou Heine, são equivalentes, pelo que a opção por uma ou outra resulta de critérios de natureza didática e pedagógica que variam ao longo do tempo. José Sebastião e Silva (1914-1972), por exemplo, ilustre matemático português que desempenhou um papel determinante na reformulação e renovação do ensino da disciplina, apresenta ambas as definições no seu Compêndio de Matemática (destinado ao ensino secundário de então), bem como uma demonstração detalhada da sua equivalência (Silva, 1978).

O próprio Sebastião e Silva mostrou-se dividido sobre qual a definição mais adequada de limite a usar no ensino secundário. Apesar de reconhecer as vantagens já enunciadas da definição de Heine, parece preferir a de Cauchy, pois afirma que a definição de Heine "pode ser substituída por uma definição directa" como a de Cauchy (Silva, 1978, vol. 2, p.132).

No entanto, nas últimas décadas, a definição de Heine tem sido presença constante no estudo do conceito de limite no ensino secundário, constando invariavelmente dos programas e metas curriculares oficiais da disciplina.

O Ensino e a Aprendizagem do Conceito de Limite

O conceito de limite é central para a compreensão de todas as áreas do Cálculo (do latim Calculus, literalmente pedra ou seixo, usados para contagens como num ábaco). O Cálculo é uma das mais importantes disciplinas da Matemática, com aplicações diretas na resolução de problemas, desde a Engenharia à Biologia, passando pelas Ciências Sociais e Humanas. A Matemática recorre ao Cálculo para estudar qualquer fenómeno que envolva mudança, tal como a Geometria estuda a forma e o espaço ou a Álgebra se debruça sobre símbolos e respetivas relações. Permite ainda desenvolver metodologias analíticas para identificar problemas, propor modelos explicativos da respetiva evolução e assim selecionar possíveis soluções. Reúne assim as características de universalidade, aplicabilidade e inteligibilidade com que Guimarães qualificou a Matemática (Guimarães et al., 2013).

Os sucessivos programas curriculares para o 11.º ano de escolaridade, parecem apontar para uma primeira abordagem intuitiva do conceito de limite, imediatamente condimentada por preocupações de rigor que reduzam a possibilidade da cristalização de ideias erradas que possam ser mais tarde difíceis de corrigir. A sugestão desta primeira perspetiva de natureza exploratória, é muito evidente no programa de 2001/2002 onde se refere que "As noções de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada desempenham um papel central…, sendo introduzidas recorrendo a um uso informal da noção de limite." (ME, 2001, p.5). Logo a seguir é-se ainda mais explícito ao convocar a colaboração prévia de disciplinas como Economia e Física/Química na preparação dos alunos para a apreensão do conceito de limite: "A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de atividades comuns ou a lecionação de algum aspeto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores." (ME, 2001, p.5).

A mesma postura prudente relativamente a uma matéria que, pela sua especial complexidade, vai exigir uma postura mais reflexiva e crítica dos alunos, está também patente nos programas subsequentes:

> A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados. (ME, 2013, p.15)

O texto do programa de 2013 sofreu algumas pequenas alterações de forma no ano seguinte. Uma delas foi a referência (mais) explícita à necessidade de reforçar a atenção ao tópico dos limites, com o intuito de "fornecer aos alunos instrumentos que garantam um prosseguimento de estudos com sucesso" (MEC, 2014, p.3):

> Com este propósito, foram introduzidos alguns conteúdos fundamentais que se encontravam ausentes no anterior Programa e cujo estudo é recomendado, pelas melhores práticas internacionais, nos ramos do Ensino Secundário com estas características, como é o caso do Cálculo Integral. Foi também reforçado o estudo de alguns tópicos – como os limites de sucessões e de funções – que quando trabalhados de forma vaga e exageradamente intuitiva levam com frequência à formação de conceções erradas, difíceis de reverter. (MEC, 2014, p.3)

De acordo com o NCTM (2000), os cinco 'Process Standards' endereçam processos associados a resolução de problemas, raciocínio e demonstração, relações entre conteúdos, comunicação e representação. Todos devem ser obviamente endereçados na apreensão do conceito de limite, mas gostaria de salientar a importância da representação. É particularmente importante que os alunos sejam capazes de pensar e explorar o conceito de limite nas diferentes representações possíveis das funções: *gráfica*, para uma perspetiva qualitativa e mais visual; *numérica* (por exemplo com recurso a tabelas) para uma exploração quantitativa; *simbólica*, onde estão presentes os níveis superiores de abstração e manipulação exigidos na Álgebra e no Cálculo. Tall (1992) acrescenta ainda a *computação* como uma nova ferramenta que possibilita não só cada uma das representações referidas, como inclusivamente combinações entre elas. Trata-se de um desafio também para o professor, uma vez que cada aluno pode demonstrar mais facilidade numa determinada representação, que deverá ser assim prioritária em termos didáticos antes de propor ou abordar outras também possíveis. Do mesmo modo, há tarefas que se prestam mais a determinado tipo de representação, comparativamente com outras. A investigação tem mostrado que os alunos com melhores resultados no Cálculo são aqueles que exibem maior versatilidade na utilização de diferentes representações na resolução de tarefas. Parecem adquirir e desenvolver a capacidade de, perante cada problema, adotarem, de forma muitas vezes intuitiva, a representação que se mostra mais adequada à respetiva resolução. Outros estudantes, menos flexíveis porque mais habituados à aplicação sistemática de procedimentos, têm frequentemente menos sucesso (Tall, 1992).

A questão fundamental e de maior dificuldade é a de saber em que momento devem os alunos ser proveitosamente confrontados com a definição formal de limite. Aparentemente, começar pela apresentação da definição pode ser, além de arriscado, contraproducente, na medida em que venha a reforçar eventuais conceitos-imagem incorretos que os alunos já tenham previamente construído. Assim, assevera-se como estratégia mais avisada, tentar identificar o conceito-imagem que cada estudante formou do conceito de limite, procedendo às correções ou alinhamentos necessários a que essa imagem não entre em conflito com o conceito-definição. A concordância entre conceito-imagem e conceito-definição é a melhor garantia de sucesso, quer nas tarefas menos complexas em que o recurso ao conceito-imagem pode revelar-se suficiente, quer nos problemas mais exigentes em que o domínio do conceito-definição seja essencial para evitar possíveis equívocos induzidos pelo conceito-imagem. Os alunos devem pois ter contacto com a definição formal de limite após construírem um conceito-imagem consistente com a definição formal. No processo de construção mental de um conceito, tudo parece apontar para que uma conceção operacional preceda a conceção estrutural (Sfard, 1991). A dificuldade em formar um conceito-imagem apropriado e os efeitos coercivos de conceitos-imagem conflituantes com o conceito formal matemático, podem dificultar seriamente o desenvolvimento de uma teoria na mente de um estudante (Tall & Vinner, 1981).

Tentar contornar a definição formal de limite pode ser uma tentação, mas será apenas o adiamento do problema, em especial para os alunos que prosseguirem estudos superiores na área científica. É verdade que, como referem muitos autores e eu próprio confirmei como estudante e professor, para a maioria dos problemas sobre limites colocados aos alunos no ensino secundário, a mobilização do conceito-definição de limite pode ser dispensada sem aparente prejuízo para o aluno quanto à correção da solução (Vinner, 2002). Este ‘conhecimento procedimental’ ou instrumental (Skemp, 1976), é frequentemente comentado pela comunidade educativa como insuficiente e hermético:

> A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do Cálculo, apresentando um grande número de exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Nesse sentido, reduz-se a idéia, o conceito, ao algoritmo, e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e "odiada" pelos professores: *Para que serve isso?* (Barufi, 1999, p.162)

Muitas vezes os próprios professores aceitam este resultado como suficiente e satisfatório (itálico no original):

> (…) *quando examinamos cuidadosamente como esses alunos "aparentemente bem-sucedidos" lidam com problemas matemáticos, descobrimos que eles têm muitos conceitos grotescos sobre matemática* e que as razões seguintes contribuem para o seu sucesso na aprovação nos testes: a maioria das aulas de matemática, do ensino fundamental ao ensino superior, ensina o que pode ser chamado de ritual, "faça isto, depois faça isto, depois isto..." *e os Professores... normalmente aceitam o ritual executado corretamente como sucesso suficiente, por agora*.
>
> Por outras palavras, o que a maioria dos alunos aprende em cursos de matemática é realizar um grande número de procedimentos padronizados, moldados em formalismos desafiadores precisos, para obter respostas para classes claramente delimitadas de exercícios de treino (Dreyfus, 2002, pp.27-28).

A definição formal e rigorosa de limite não foi no entanto descurada, nem pelo programa curricular oficial, nem na planificação anual da disciplina pela escola, nem tão pouco pelo manual adotado. A escolha da definição de limite (de uma função) segundo Heine, consolidada nos últimos anos, parece também responder à necessidade de estabelecer uma continuidade entre limites de sucessões e limites de funções, permitindo aos alunos evocar para a álgebra de limites de funções o mesmo tipo de argumentos probatórios que já tinham aprendido a aplicar nos teoremas correspondentes sobre sucessões:

> A definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação,…(ME, 2013, p.16)

Ao contrário do que sucede com a definição de Cauchy (também conhecida por 'ε- δ definition'), a definição de limite segundo Heine é mais propensa à utilização de termos da linguagem comum. O manual adotado também aponta nesse sentido, não fazendo praticamente uso de quantificadores no tratamento dos limites de funções, recorrendo-lhes apenas, ainda que com parcimónia, no subdomínio do limite de sucessões. Esta abordagem tem a desvantagem de aumentar a verbosidade e diversidade vocabular dos enunciados (registo ou representação verbal), com a frequente perda do rigor extremo associado à notação matemática clássica (Bagni, 2005). Mas tem também o benefício de não acrescentar dificuldades adicionais e assim permitir maior foco no essencial do conceito de limite. São inúmeras as referências ao incómodo dos alunos em lidar com quantificadores, especialmente quando surgem a três ou mesmo quatro níveis (não comutativos), como na definição e enunciados envolvendo a noção de limite. A quantificação é um conceito raramente bem apreendido, quer a nível secundário, quer mesmo universitário (Dubinsky et al, 1988). Todorov (2011) vai um pouco mais longe e considera que o Cálculo e a Análise se deveriam libertar desta notação própria da Lógica. São exemplos em como é ainda hoje difícil à Matemática apresentar uma notação e representação no tratamento dos limites como o faz, com consenso e eficácia, noutras temáticas.

Dificuldades na Compreensão do Conceito de Limite

É no Cálculo que, pela primeira vez, os alunos são confrontados com o conceito de limite, envolvendo questões que já não podem ser resolvidas usando técnicas da aritmética ou álgebra elementar, bem como processos não finitos que só podem ser apreendidos por argumentação indireta. Os professores tentam frequentemente evitar maiores dificuldades, recorrendo a abordagens informais e dessa forma evitando tecnicidades a que os alunos são também normalmente avessos. Apesar disso, continua a haver uma insatisfação generalizada relativamente à aprendizagem da Matemática em geral e do Cálculo em particular.

Seja qual for a abordagem adotada, existem dificuldades inerentes ao conceito de limite, isto é, não dependentes da forma como é apresentado ou lecionado aos alunos. Entre as dificuldades cognitivas colocadas pelo conceito de limite podem enumerar-se as seguintes (Tall, 1992):

- Dificuldades incorporadas na linguagem; termos como 'limite', 'tender para', 'aproximar a', 'tão pequeno quanto se queira', têm uma força e significado coloquial que conflitua com o conceito formal;
- O processo de abordagem do limite não é efetuado com recurso à álgebra ou aritmética simples. Surgem conceitos associados a infinito e o resultado final acaba por ficar 'envolvido em mistério';
- O processo pelo qual uma variável 'vai tomando valores arbitrariamente mais pequenos' é muitas vezes interpretado como uma 'quantidade variável arbitrariamente pequena', sugerindo implicitamente conceitos infinitesimais, mesmo quando os mesmos não foram explicitamente apresentados;
- Do mesmo modo, a ideia de 'N crescendo de forma arbitrária', implicitamente sugere conceções de números infinitos;
- Os alunos muitas vezes denotam dificuldades em entender se o limite pode efetivamente ser atingido;
- Há confusão na passagem do finito ao infinito, no entendimento 'do que acontece no infinito'.

Como é que os estudantes lidam normalmente com os conflitos acima descritos? Há duas possibilidades, como afirma Tall (1992):

- Reconciliar conceitos antigos com os agora propostos, reconstruindo uma nova e coerente estrutura de conhecimento;
- Manter os elementos conflituantes em compartimentos (mentais) separados e não deixar que os mesmos emerjam em simultâneo à consciência.

Como a primeira é claramente mais difícil, muitos alunos (e talvez a maioria dos professores) optam pela última solução, evitando e separando a problemática teórica dos métodos práticos de resolução de problemas. Quantas vezes os exercícios sobre limites não se concentram no conceito em si, mas em desigualdades, valor absoluto ou em operações algébricas sobre limites. Há uma clara separação e privilégio do conhecimento procedimental sobre o conhecimento conceptual (Cornu, 2002; Fernández-Plaza et al., 2013; Tall, 1992).

Alguns estudos mostram que aquilo em que os alunos acreditam resulta do tipo de tarefas que normalmente executam (Tall, 1992). Ervynck, citado por Tall (1992), concluiu que a maioria dos estudantes tem um entendimento pré-rigoroso de limite, mas muito poucos alcançam uma compreensão plena da definição exata. No entanto a solução desta situação está longe de ser simples. As abordagens informais têm a desvantagem de muitas vezes desenvolverem crenças que entram em conflito ou dificultam a apreensão da teoria formal; por sua vez, a ênfase no formalismo pode revelar-se muito difícil num primeiro contacto, provocando um défice de perceção e intuição.

Para tentarmos entender as dificuldades dos alunos, convém procurar perceber a forma como pensamos. Ou melhor, como usamos perceções, operações e linguagem para formular ideias progressivamente mais sofisticadas. Tall (2012) sugere que o processo envolve três formas distintas de pensamento matemático, uma proveniente das nossas perceções naturais, outra das ações que executamos e traduzimos simbolicamente e, finalmente, uma terceira em que formulamos definições lógicas e desenvolvemos estruturas de demonstração formal.

Quando se começa a estudar cálculo, o sucesso depende das experiências anteriores e do nível de conhecimentos atuais. Por isso, talvez seja conveniente questionar os alunos sobre a forma como eles pensam e concebem a noção de limite. Como definiriam limite, que significado lhe atribuem? Como relacionariam limite com outras ideias e conceitos que já conhecem na matemática?

Tall (2012) dá um exemplo de abordagem visual do conceito de limite que pode ter vantagens, pelo menos num primeiro contacto. Considera o número 0,999(9), frequentemente concebido como 'imediatamente anterior a 1', em vez de precisamente igual a 1. Atribui esta diferença a um conflito entre aspetos simbólicos e visuais do conceito de convergência. Embora seja evidente que nenhum termo desta sequência de aproximações decimais alcança a unidade (isto é, o limite), se visualmente representarmos os sucessivos termos sobre uma reta, constataremos que muito rapidamente os pontos se tornarão indistinguíveis do limite. Isto é verdade para qualquer sequência de pontos a_1, a_2, a_3,…tendente para o limite $\boldsymbol{a}$. Quando nos focamos nos pontos de maior ordem e vamos removendo os pontos iniciais a_1, a_2, a_3,…constatamos que, a partir de certa ordem, os termos são indistinguíveis ao olho humano do limite $\boldsymbol{a}$.

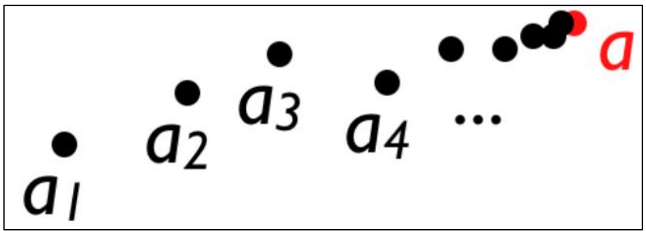


Figura 2-1: Sequência de pontos tendendo para o limite a (Tall, 2012)

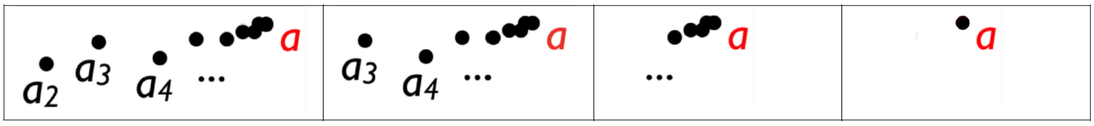


Figura 2-2: Remover os pontos iniciais até que os termos restantes sejam indistinguíveis do limite $\boldsymbol{a}$ (Tall, 2012)

O importante aqui é a visibilidade do limite e o facto de os termos da sequência se tornarem indistinguíveis dele a partir de ordens mais ou menos elevadas. Esta estratégia pode resultar, uma vez que os alunos iniciados em cálculo estão habituados a operar num mundo de 'boa aproximação' aritmética. De facto, para eles a sequência 3,1 / 3,14 / 3,141 / 3,1415 /…/, *tende para* $\boldsymbol{\pi}$ no sentido de que várias aproximações, tal como 3,14 / 3,1412 / $\frac{22}{7}$ /, são uma boa substituição de $\boldsymbol{\pi}$ em determinado contexto prático.

(Cornu, 2002) designa por 'conceções espontâneas' as conceções de uma ideia que precedem o processo de aprendizagem formal da mesma. De facto, antes mesmo do professor efetuar a primeira introdução ao conceito de limite, os alunos já têm um certo número de ideias, intuições, imagens, conhecimento informal, proveniente das suas vivências e experiências diárias, por exemplo o significado que atribuem ao termo (ou à expressão) 'tende para' na linguagem coloquial. Estas ideias espontâneas não desaparecem e combinam-se com os novos conceitos apresentados pelo professor, resultando numa espécie de conceção personalizada, isto é, cada aluno constrói a sua própria imagem mental de limite, mais ou menos distante do conceito definido pelo professor.

Como exemplo, a investigação aplicada ao conceito de limite revelou que a expressão 'tender para' pode suscitar aos alunos significados tão distintos como (Cornu, 2002):

- Aproximar (eventualmente sem atingir)

- Aproximar … sem atingir
- Aproximar … até atingir
- Assemelhar-se (no sentido de que por exemplo 'tons de azul tendem progressivamente para violeta')

A própria palavra 'limite' suscita nos alunos significados por vezes muito diferentes, como 'valor/ponto fixo impossível de alcançar', 'valor/ponto fixo que pode ser atingido', 'algo que fica imediatamente a seguir ao que pode ser alcançado', 'um mínimo/máximo', 'o início ou fim de algo', 'uma regra', 'um intervalo' (Cornu, 2002).

Este processo gera conflitos cognitivos que impactam e podem comprometer ou dificultar a aprendizagem do conceito de limite. A didática designa de obstáculos cognitivos algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos no processo de aprendizagem. É possível distinguir diferentes tipos destes obstáculos, tais como:

<u>Genéticos e Psicológicos</u> – associados ao desenvolvimento individual do estudante

<u>Didáticos</u> – ligados à natureza do ensino e ação do professor

<u>Epistemológicos</u> – resultantes da natureza dos conceitos matemáticos que são objeto de ensino-aprendizagem (associados ao modo como se apreende e se apropria o conhecimento)

Todas as dimensões acima são importantes, pelo que o professor deve procurar determinar os obstáculos cognitivos manifestados pelos alunos. No que respeita ao planeamento da aprendizagem de um conceito complexo como é o caso do conceito de limite, toma especial importância a identificação dos obstáculos de natureza epistemológica.

Vários autores (como Gaston Bachelard e Guy Brousseau, citados por Cornu, 2002), consideram que os obstáculos epistemológicos são inevitáveis e inerentes ao próprio processo de aquisição e progresso do conhecimento. Bachelard (citado em Cornu, 2002) identifica duas características essenciais dos obstáculos epistemológicos:

- São <u>inevitáveis</u> e inseparáveis dos novos conhecimentos que estão a ser adquiridos
- Estão <u>sempre presentes</u>, pelo menos em parte, na evolução histórica de um conceito

Brousseau (citado em Cornu, 2002) considera que um obstáculo epistemológico é um conhecimento/técnica que pode funcionar bem num determinado contexto, mas mostrar-se completamente desadequado em novas circunstâncias. É desta forma que evolui o conhecimento científico e é também assim que se processa a aprendizagem dos alunos. A identificação e rejeição de um obstáculo cognitivo é parte essencial do próprio processo de conhecimento. A transformação implica uma desestabilização de ideias/conceitos anteriores e a sua substituição por novos conceitos. É uma tarefa de reconstrução cognitiva que exige grande esforço (Cornu, 2002).

Em termos históricos, o conceito de limite apresenta quatro principais obstáculos epistemológicos (Cornu, 2002):

- <u>Articulação entre geometria e álgebra</u> – o conceito de limite é muitas vezes mais facilmente apreendido em termos geométricos, tendo sido historicamente difícil a sua transposição para o domínio algébrico.
- <u>Noções de infinitamente pequeno e infinitamente grande</u> – como se passa do infinitamente pequeno ao zero e vice-versa, até que ponto são conceitos distintos? Euler considerava que um 'infinitamente pequeno' era uma quantidade que, em certas condições, poderia ser igualada a zero. O mesmo tipo de questões se coloca entre o 'infinitamente grande' e o conceito de infinito.
- <u>Aspetos metafísicos da noção de limite</u> – a noção de limite foi difícil de introduzir na matemática porque tem conotações que a remetem para a área da metafísica e filosofia. Ainda hoje é frequente ouvir referências ao limite como 'não sendo bem matemática'. Os processos e metodologias são apelidados de 'muito abstratos', 'pouco rigorosos' ou 'aproximados'. Este é um obstáculo que pode introduzir sérias dificuldades na aprendizagem do conceito de limite, principalmente porque muitos limites não podem ser calculados de forma direta usando os métodos mais usuais de álgebra e aritmética.
- <u>O limite é ou não atingido?</u> – este é um debate que acompanha o conceito de limite desde a sua origem. Robins (1707-1751, contemporâneo de Newton), por exemplo, afirmou que o limite nunca era atingido, da mesma forma que polígonos regulares inscritos numa circunferência nunca a igualam.

Note-se que embora alguns destes obstáculos epistemológicos estejam hoje ultrapassados com os desenvolvimentos da matemática no século XX, eles continuam de um modo geral presentes na sala de aula, uma vez que todo o formalismo e linguagem utilizados foram estabelecidos no século XIX.

O papel do professor não deve ser o de evitar a manifestação destes e de outros obstáculos cognitivos. Pelo contrário, as estratégias pedagógicas devem sempre tê-los em atenção, procurando conduzir os alunos a ultrapassá-los, sendo estas dificuldades parte integrante da revisão e reconstrução do conceito de limite que se pretende que os alunos alcancem.

Mas, coloca-se a questão: Que estratégias pedagógicas seguir ou adotar no sentido de facilitar a aprendizagem do conceito de limite pelos alunos? A diversidade de conceções, a riqueza e complexidade das noções e os obstáculos cognitivos, tornam o ensino-aprendizagem do conceito de limite extremamente difícil. Já foram efetuadas muitas tentativas para ultrapassar o problema, mas com pouco sucesso. A experiência obtida permite no entanto arriscar algumas recomendações pedagógicas (Cornu, 2002).

Em primeiro lugar, não parece suficiente apresentar aos alunos uma exposição clara do conceito de limite para garantir que eles o entenderam e interiorizaram. Antes da sessão onde a noção de limite é explicitamente apresentada, os estudantes devem ser confrontados com atividades apropriadas que os ajudem (e ao professor) a identificar e consciencializar ideias espontâneas, imagens, intuições, experiências, que serão provavelmente mobilizadas durante o processo de aprendizagem do conceito de limite. Uma atenção particular a aspetos de linguagem e aos diferentes significados de palavras que irão ser usadas nas aulas sobre limites.

Outro aspeto relevante é o contexto em que se vai processar a aprendizagem. A noção de limite deve ser usada para resolver problemas específicos. Para manter os alunos motivados e envolvidos, é importante que o limite seja apresentado ao aluno como uma ferramenta útil, algo que pode ajudar a responder a questões e solucionar problemas que o próprio aluno valorize. Isso normalmente não acontece e representa um tremendo desafio pedagógico e didático para o professor e para a escola. O mais usual é que a apresentação do conceito seja seguida de uma sequência de problemas e exercícios onde basicamente se exige que o aluno aplique conhecimentos de Álgebra.

Se é muito difícil selecionar exercícios e problemas que obedeçam aos requisitos descritos, também não é fácil prescrever a ordem e sequência pela qual devem ser apresentados aos alunos. Existem muitas propostas e alternativas, mas é necessário experimentar e observar resultados para decidir quais as mais eficazes. Uma abordagem puramente lógica, em que o conceito é introduzido por meio de definições e deduções lógicas parece ser insuficiente. Há quem recomende uma aproximação gráfica ao conceito, primeiro de modo informal e implícito, antes de o introduzir como objeto matemático (Tall & Vinner, 1981). Outros, mais próximos do construtivismo, consideram que cada conceito matemático tem de ser previamente decomposto (‘genetic decomposition’), de modo a gerar uma coleção de abstrações (‘reflective abstractions’) que serão abordadas segundo uma sequência que provoque finalmente a aprendizagem do conceito pretendido (Dubinsky, 2002).

Finalmente, parece ser unânime o papel importante que o recurso à computação pode vir a desempenhar no auxílio à apropriação do conceito de limite. É uma área onde já foram realizados alguns estudos experimentais promissores, mas que necessita ainda de bastante investigação, uma vez que a introdução do computador na aprendizagem dos limites pode igualmente potenciar novos obstáculos epistemológicos (Cornu, 2002).

Tarefas Exploratórias e Problemas no Processo de Ensino e Aprendizagem do Conceito de Limite

As práticas clássicas de ensino expositivo estão hoje em desuso e desacreditadas, mesmo em modalidades onde o professor apela à participação ativa dos alunos e da turma. O aluno é o centro de todo o processo de aprendizagem, cabendo ao professor motivar, propor, orientar e efetuar sínteses, em vez de ser ele próprio o ator principal na sala de aula, uma espécie de apresentador dos conteúdos que os alunos deveriam aprender.

O ensino passou então a ser mais exploratório que expositivo. Na terminologia usada por (Ponte, 2005), privilegia-se uma estratégia de ensino-aprendizagem exploratório face ao ensino direto. Mas isso não significa, tal como refere (Canavarro, 2011), que os alunos descobrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos. Não se pense que o papel do professor em sala de aula deva ser menorizado, esperando pacientemente pelos rasgos iluminados dos seus alunos. Pelo contrário, o ensino exploratório da matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva (Canavarro, 2011).

O ensino exploratório é por isso, antes de mais, um tremendo desafio para o professor. Cabe-lhe a responsabilidade da escolha criteriosa das tarefas a realizar pelos alunos e o delineamento da respetiva exploração matemática com vista ao cumprimento do seu propósito matemático, orientado pelas indicações programáticas, nomeadamente o desenvolvimento de capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (ME, 2013). Para além de gerir o trabalho dos alunos, o professor precisa de interpretar e compreender como eles resolvem a tarefa e de explorar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Não admira assim que o ensino exploratório da matemática seja uma atividade complexa e considerada difícil por muitos professores, em particular a dinamização e gestão das discussões matemáticas coletivas (Stein et al., 2008). "Esta natureza interativa do ensino, envolvendo professor e alunos, é uma marca distintiva do ensino exploratório." (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p.3).

A análise das características das tarefas é, pois, um aspeto essencial para a sua seleção. É importante que o professor reconheça nas tarefas as características essenciais que contribuem para proporcionar aos alunos as aprendizagens específicas que pretende, nomeadamente aspetos como a estrutura da tarefa, a formulação das questões e a sequência pela qual surgem. O conhecimento da influência destes aspetos contribui para que o professor esteja mais preparado para adaptar da melhor forma as tarefas que deseja usar com os seus alunos. Um outro cuidado que o professor tem na sua preparação letiva é o de sequenciar as tarefas matemáticas que propõe aos alunos ao longo do tempo. (Canavarro & Santos, 2012).

As tarefas podem assim ser muito diferentes, quer no que respeita ao nível de dificuldade ou complexidade, quer ao nível de adequação aos objetivos que se pretendem atingir. E aqui é difícil dispensar o papel essencial do professor. Uma boa classificação de tarefas, baseada em duas dimensões fundamentais (grau de desafio e grau de abertura/estrutura), é apresentada por (Ponte, 2005) e pode ser esquematizada como apresentado na Figura 2-3.

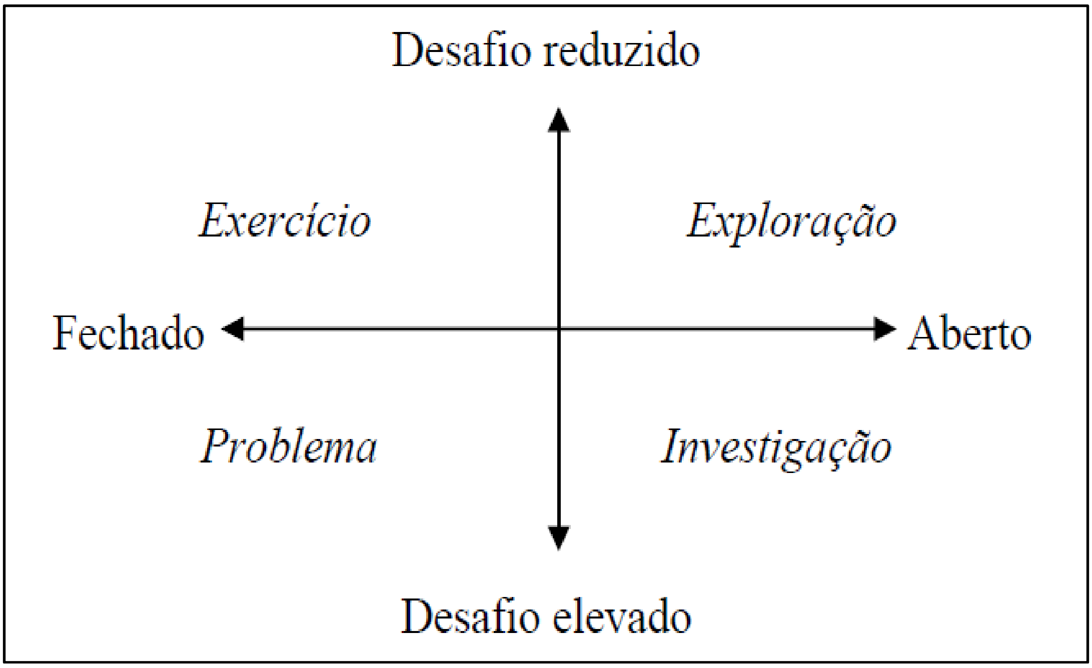


Figura 2-3: Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005)

Outro aspeto muito importante relacionado com o trabalho em aula, diz respeito à forma como as tarefas, uma vez executadas pelos alunos, são apresentadas e discutidas por todos, com a moderação e coordenação do professor. Esforcei-me por adotar as cinco práticas propostas por (Stein et al., 2008), apresentadas num exemplo prático em (Canavarro, 2011), resumidas e descritas no Quadro 2-1.

É importante salientar que as práticas descritas são todas essenciais e sequenciais, quer dizer, cada uma depende e utiliza a informação recolhida em todas as anteriores.

Quadro 2-1: Cinco práticas para orquestrar discussões em aula (Stein et al., 2008)

Práticas Sequenciais	**Descrição**
Antecipar	Pertence ao trabalho de planificação da tarefa. Previsão por parte do professor de como os seus alunos irão abordar as tarefas que lhes coloca. **Prever** a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa; **Elencar** uma diversidade de estratégias, corretas e incorretas que os alunos poderão usar, com diferentes graus de sofisticação; **Relacionar** essas estratégias com os conceitos, representações ou procedimentos que deseja que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam.
Monitorizar	Realiza-se em sala de aula, durante a execução da tarefa. Apropriação por parte do professor das estratégias e resoluções que os alunos realizam durante o trabalho autónomo, com o objetivo de avaliar o seu potencial para a aprendizagem matemática a promover na turma. **Observar e ouvir** os alunos ou grupos; **Avaliar** a validade matemática das suas ideias e resoluções; **Interpretar** e dar sentido ao seu pensamento matemático, mesmo que lhe pareça estranho e/ou não o tenha antecipado; **Ajudar** os alunos em dificuldade a concretizar resoluções que tenham potencial matemático relevante.
Selecionar	**Identificar** os alunos ou grupos cujas resoluções são importantes para partilhar, com toda a turma, na fase de discussão. Possíveis critérios: • Resolução que apresenta um *erro recorrente* a esclarecer; • Resolução particular que se *distingue e acrescenta compreensão* e/ou *ajuda a atingir o propósito* matemático da aula; • Resoluções com *diferentes estratégias* matemáticas; • Resoluções com *representações matemáticas diversas*.
Sequenciar	Decisão sobre a **ordem** pela qual decorrerá a apresentação e partilha dos trabalhos dos alunos. Possíveis critérios: • Começar por uma resolução que torne a discussão mais acessível; • Exploração matemática de uma resolução errada; • Começar por resoluções mais informais; • Deixar para o final as resoluções que permitam generalizar e/ou sistematizar, aproveitando para apresentar sínteses.
Estabelecer Conexões	Esta prática dá-se imediatamente a seguir à discussão das diferentes resoluções e, muitas vezes, pode mesmo iniciar-se durante a discussão de uma solução apresentada para a tarefa. O professor convida os alunos a **analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções** apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais-valias de cada uma delas para abordar tarefas futuras.

O sucesso de uma tarefa não depende exclusivamente do cuidado do professor na respetiva seleção e aplicação das práticas de orquestração descritas. Aspetos como constituição dos grupos de trabalho (quando a tarefa não for individual), uma gestão criteriosa do tempo previsto para cada etapa (evitando por exemplo que a tarefa não se conclua na mesma aula, quando tal for conveniente, também exemplificando, para um maior envolvimento dos alunos), ajudar os alunos sem reduzir o nível cognitivo colocado pela tarefa, mobilizar os recursos necessários a uma maior eficiência do trabalho dos alunos e da discussão posterior, promover um ambiente estimulante e aberto que convide à participação ativa de todos os alunos, independentemente do seu nível cognitivo ou de aproveitamento (Canavarro & Santos, 2012).

Embora todas as fases que constituem a organização de uma aula de ensino exploratório sejam importantes, gostaria de salientar a que segue à ‘exploração’ autónoma da tarefa pelos alunos, ou seja, a fase de ‘discussão e sintetização’.

> Esta é uma fase da aula particularmente exigente para o professor, especialmente a gestão da discussão coletiva. Embora o professor tenha como base de orientação um *script* (a sua planificação) e a observação que fez do trabalho dos alunos na fase anterior, existe um espaço amplo, com muitos caminhos, para a intervenção do professor na discussão. O professor tem de gerir as interações de muitos protagonistas e dessa forma orquestrar a discussão,… (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p.4)

Na fase de discussão e sintetização/sistematização podem surgir os chamados episódios de ampliação (‘extending episode’), sempre que o foco se move para uma ideia matemática diferente. Os episódios seguem o curso habitual de uma discussão, iniciando-se com o professor a colocar uma questão ou então a desafiar um aluno (ou grupo de trabalho) a apresentar uma ideia, continuando depois focados nesse trabalho.

> …consideram três tipos de episódios de ampliação: (i) *encorajar a reflexão matemática*, que se traduz no levar os alunos a compreender, comparar e generalizar ideias matemáticas; a considerar e discutir relações entre ideias; a usar diversas resoluções e a considerar a razoabilidade de um argumento; (ii) *avançar nas ideias iniciais*, levando os alunos a procurar resoluções alternativas e a promover o uso de estratégias de resolução eficazes; e (iii) *promover o raciocínio matemático*, envolvendo a justificação das ideias e das estratégias dos alunos e o acompanhamento das justificações dos colegas. (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p.4)

Estes episódios são frequentemente muito exigentes e desafiantes também para o professor. Este realiza, em cada episódio, uma série de movimentos que são chamados de *ações instrucionais*, cujo propósito é desafiar os alunos a apresentar as suas ideias, dar-lhes apoio e orientação para evitar dispersão do objetivo da discussão, permitir que avaliem argumentos e observações, exibindo, se necessário, contra-argumentos. Em resumo, cabe ao professor o papel de orientar os alunos para a sistematização das principais ideias matemáticas que emergem da discussão (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

É incontornável a relevância das tarefas propostas aos alunos no ensino-aprendizagem da Matemática. Num ensino eficaz, as tarefas matemáticas mais compensadoras são as que permitem introduzir ideias e conceitos matemáticos importantes, envolvendo e desafiando intelectualmente os alunos. Tarefas bem escolhidas e cuidadosamente elaboradas podem despertar a curiosidade dos estudantes e atraí-los para a matemática, quer estejam relacionadas com experiências do mundo real ou surgir em contextos puramente matemáticos. Independentemente do contexto, as tarefas mais gratificantes devem ser intrigantes, com um nível de desafio que convide à especulação e trabalho empenhado por parte dos alunos (NCTM, 2000).

Quando confrontados com tarefas matemáticas adequadas, os alunos reforçam a sua confiança na abordagem dos problemas de maior dificuldade, tornam-se mais perseverantes, anseiam por descobrir soluções de forma autónoma, exploram e procuram alternativas. Refletem sobre soluções propostas e aprendem com os seus próprios erros. Tendem a encarar as dificuldades como desafios, em vez de desculpas para desistir. Mesmo quando uma tarefa matemática é difícil, pode ser envolvente e gratificante (NCTM, 2000).

Capítulo 3 – Unidade de Ensino

O presente estudo reflete os resultados da minha lecionação numa turma do 11.º ano do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, curso de Ciências Socioeconómicas. A minha intervenção ocorreu na primeira parte do domínio de Funções Reais de Variável Real, especificamente a definição de limite segundo Heine.

Este capítulo efetua uma caracterização do contexto escolar em que decorreu a lecionação, enquadramento da unidade didática no programa de Matemática do ensino secundário e uma breve descrição das estratégias de ensino-aprendizagem adotadas. Finalmente, apresenta-se um resumo representativo de cada uma das seis aulas lecionadas.

Caracterização do Contexto Escolar

Caracterização da Escola

A intervenção letiva supervisionada decorreu na Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto, pertencente ao Agrupamento de Escolas Queluz-Belas. Está localizada na Avenida Comandante Paiva Couceiro, 2745-190 Queluz, freguesia União de Freguesias Queluz-Belas, concelho de Sintra. Trata-se de uma instituição de educação oficial inserida no tecido urbano de Queluz, portanto na Área Metropolitana de Lisboa.

O Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas foi constituído em 3 de julho de 2012. Como escola secundária (ESPAN), começou por se designar Liceu Nacional de Queluz no ano letivo de 1972/1973, depois Escola Secundária de Queluz (1979/1980) e finalmente a designação atual em 1993.

A maioria dos alunos da escola provêm de Belas e Queluz, duas das áreas mais populosas do concelho de Sintra. A maior parte da população exerce a sua atividade profissional fora destas localidades, pelo que são consideradas áreas dormitório.

Figura 3-1: Localização da Escola Secundária Padre Alberto Neto

O município de Sintra tem cerca de 316 Km^2 de área e 381.000 habitantes (*Censos 2011*), o que determina uma densidade populacional superior a 1.200 habitantes por Km^2, estando subdividido em 11 freguesias. Queluz e Belas representam 7,5% do espaço do concelho e 14% da população. A cidade de Queluz, com 78.000 habitantes (20% da população do concelho), tem cerca de 1/3 destes na freguesia de localização da escola (União de Freguesias de Queluz-Belas, criada em 2012). A cidade integra ainda as freguesias de Monte Abraão e Massamá.

De acordo com o *Censos 2011*, a União de Freguesias de Queluz-Belas tem uma população de 52.000 habitantes, o que determina uma densidade populacional superior a 2.100 habitantes por Km^2, 75% superior à média concelhia. Refira-se que as antigas duas freguesias registam um efetivo populacional equilibrado, tendo-se assistido a um decréscimo de população em Queluz e um aumento em Belas. Entre 2001 e 2011 ocorreu um crescimento populacional de 7%, o dobro da média concelhia.

Outra das características desta nova freguesia conjunta é o peso da população estrangeira que, em 2011, representava 11,5% da população residente em Queluz e 5,2% em Belas, contra os 7,2% no concelho. O maior grupo de residentes estrangeiros em Queluz tem como origem Cabo Verde, enquanto o de Belas tem origem no Brasil, ambos com um peso relativo de cerca de 27%.

Para além da assimetria em termos de crescimento populacional, as duas antigas freguesias são também diferentes no que respeita ao nível de escolaridade. Belas tem 21% da sua população com escolaridade até ao 1.º ciclo, contra 26% em Queluz. Com o ensino secundário, regista-se 70% da população de Belas e 77% em Queluz. Para além disso, 13% da população de Queluz e 18% da de Belas concluíram o ensino superior, contra a média nacional de 15%.

À data de 4 de outubro de 2018, a população escolar do Agrupamento era constituída por 4.365 alunos, distribuídos pelos vários ciclos de ensino, desde o Pré-escolar ao Ensino Secundário (incluindo o Profissional) e aos Cursos de Educação e Formação (CEF) e Formação de Adultos (EFA), como é possível observar nos seguintes quadros (Quadro 3-1 e Quadro 3-2):

Quadro 3-1: Número de alunos por ciclo de escolaridade (2018/2019)[1]

Ciclo Escolaridade	Número Alunos	Percentagem (face ao total)
Pré-escolar	421	9,5
1.º Ciclo	1313	30,1
2.º Ciclo	675	15,5
3.º Ciclo	937	21,5
Ensino Secundário	***566***	***13,0***
Cursos CEF	60	1,4
Ensino Secundário Profissional	197	4,5
Cursos EFA	196	4,5
TOTAIS	*4.365*	*100*

Quadro 3-2: Número de turmas e de alunos por escola (2018/2019)

Escola	Número Turmas	Número Alunos
Belas 2 (básica)	4	99
Belas 3 (básica/jardim infância)	6	138
Belas 5 (básica)	4	83
Mário da Cunha Brito (básica/jardim infância)	13	316
Padre Alberto Neto (básica e secundária)	***79***	***2003***
Pego Longo (básica/jardim infância)	7	159
Pendão (básica/jardim infância)	12	291
Prof. Galopim de Carvalho (básica 2/3)	27	628
Queluz 2 (básica/jardim infância)	27	604
Serra da Silveira (jardim infância)	2	44
TOTAIS	*181*	*4.365*

[1] Fonte: Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas, Projeto Educativo (2018-2022)

Há um equilíbrio na distribuição dos alunos por ciclos, atendendo à duração destes. Já o mesmo não sucede quanto à distribuição dos alunos do Agrupamento por escola. A Escola Secundária concentra 46% dos alunos do Agrupamento, ao passo que as oito escolas de pré-escolar e de 1.º ciclo são frequentadas por 40% dos alunos. A segunda maior unidade de ensino, Escola Professor Galopim de Carvalho, é frequentada por 14% dos alunos, do que resulta que 75% dos alunos do Agrupamento estão concentrados em 30% das escolas.

Neste momento, a taxa de ocupação do Agrupamento é de 97%, mas em 7 das escolas é de 100%. Este valor é muito elevado, dificultando o desenvolvimento de outras atividades, através da utilização de espaços alternativos ou com outras valências, como por vezes é necessário ou o desenvolvimento do currículo o justifica.

Por via das características e enquadramento social da população da área de influência do Agrupamento, o número de alunos com apoio social escolar é bastante elevado, se bem que com tendência a diminuir. Registe-se, contudo, que mais de 1900 alunos beneficiam dos citados apoios, 46% do total de alunos elegíveis, com variações significativas, dispersando-se entre os 19% no pré-escolar, 57% no 3.º ciclo e 81% nos cursos profissionais.

Em todo o Agrupamento estão matriculados alunos oriundos de 33 países (ano letivo 2017/2018), contribuindo a Guiné-Bissau, Cabo Verde, Brasil e Angola com 84% dos alunos não nacionais. Este registo tem tido tendência de crescimento, sobretudo a partir dos alunos oriundos do Brasil. Deste universo de alunos, 11% não tem o português como língua materna, mas os não falantes são em número reduzido, cerca de 20 no total (Quadro 3-3).

Atendendo a esta heterogeneidade e encarando a diferenciação pedagógica como um pressuposto para a gestão curricular, justifica-se a inclusão do Agrupamento, a partir do ano letivo 2018/2019, no projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular implementado pela tutela. Este projeto proporcionará aos alunos experiências de aprendizagem mais enriquecedoras, requerendo no entanto, para a sua correta implementação, espaços físicos e curriculares específicos.[1]

[1] Fonte: Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas, Projeto Educativo (2018-2022)

Quadro 3-3: Número de alunos por nacionalidade no Agrupamento (2017/2018)1

País	Número Alunos	Percentagem (face ao total)
Portugal	3.676	85,7
Cabo Verde	136	3,2
Guiné-Bissau	159	3,7
Angola	86	2,0
Brasil	133	3,1
Moçambique	2	-
São Tomé e Príncipe	21	0,5
Europa (13)	49	1,1
Outros Países (14)	28	0,7
TOTAIS	*4.290*	*100*

O pessoal docente do Agrupamento de Escolas Queluz-Belas é estável, como pode verificar-se pelo facto de 72 % dos professores pertencerem ao quadro de escola, 79% se atendermos aos docentes de quadro de zona pedagógica (QZP). Um quinto dos docentes tem contrato anual, renovado para mais um ano na sua maioria.

Uma percentagem considerável dos docentes de quadro (mais de 80%) está no Agrupamento há mais de 6 anos. Por outro lado, verifica-se o envelhecimento dos docentes de quadro, já que a sua média de idades é superior a 54 anos, mais evidente no pré-escolar e 3.ºciclo/secundário (57 e 56 anos, respetivamente) e menos no 1.º ciclo (49 anos).

Dos cerca de 70 docentes contratados anualmente (Quadro 3-4), metade estão muito deslocalizados, com residência oficial principalmente a norte do Rio Mondego, facto que anualmente se tem vindo a repetir.

Quadro 3-4: Número de docentes por vínculo (2018/2019)

	Quadro	QZP	Contratados	Total
Nº Docentes	233	20	71	324
% Total	*71,9*	*6,2*	*21,9*	*100*

Quanto ao pessoal não docente, é constituído por 125 pessoas, repartidos entre a Câmara Municipal de Sintra (todas as escolas menos a ESPAN) e o Ministério da Educação (ESPAN), distribuídos de acordo com o Quadro 3-5. Em todas as escolas o

[1] Fonte: Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas, Projeto Educativo (2018-2022)

rácio número de funcionários/número de alunos está cumprido, existindo apenas problemas de falta de pessoal em situações de eventual absentismo ou quando as reposições por aposentação são mais demoradas.[1]

Quadro 3-5: Funcionários não docentes por categoria (2018/2019)

Categoria Profissional	Nº Funcionários
Chefe de Serviços de Administração Escolar	1
Assistente Técnico	13
Assistente Operacional	111
Total	*125*

O Agrupamento mantém um relacionamento estreito com várias entidades, públicas e privadas, tendo em vista a prestação de um serviço público mais eficiente.

Por ministrar Cursos de Educação e Formação (CEF) e Cursos Profissionais, a escola-sede (ESPAN) dispõe de uma bolsa de cerca de 50 empresas e instituições com as quais colabora na Formação em Contexto de Trabalho dos seus alunos.

O Agrupamento conta, também, com a participação ativa de quatro associações de pais e encarregados de educação, enquanto agentes fundamentais do processo educativo, nas atividades da Escola e no acompanhamento pedagógico e disciplinar dos educandos.

Em termos de resultados escolares no ensino secundário, no período 2012/2018 verificou-se uma melhoria nos resultados internos (+6,1%), não acompanhando contudo a evolução positiva a nível nacional (+13,1%) – Quadro 3-6.

Quadro 3-6: Resumo da evolução do sucesso escolar por ciclo de escolaridade

Ciclo Escolaridade	Escola (2012/2013)	Nacional (2012/2013)	Relação Escola/Nacional	Escola (2017/2018)	Nacional (2017/2018)	Relação Escola/Nacional
1.º	94,2	94,8	0,98	96,0	97,0	0,98
2.º	79,3	86,5	0,94	84,0	94,1	0,92
3.º	81,3	83,1	0,98	83,2	91,4	0,91
Secundário	*71,5*	*71,7*	*1,00*	*77,6*	*84,8*	*0,91*

Os critérios de avaliação eram conhecidos de todos, pareceu-me serem bem aceites pelos alunos, que se apropriaram deles sem dificuldade. Os critérios base para a disciplina de Matemática foram definidos para toda a escola, tendo os docentes da disciplina aprovado os seguintes parâmetros e respetivas ponderações (Quadro 3-7),

[1] Fonte: Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas, Projeto Educativo (2018-2022)

para obter um valor médio de classificação dos alunos no final de cada período letivo (ESPAN, Matemática A, Despacho nº686-B/2014 de 20 de janeiro, critérios de avaliação, 11.º anos):

Quadro 3-7: Parâmetros de avaliação e respetivas ponderações (ESPAN 2018/19)

Conhecimentos e Capacidades		Atitudes
Testes escritos	Pequenos instrumentos de avaliação escritos; Trabalhos de pesquisa/investigação; Relatórios; Trabalhos de grupo; Pequenos trabalhos de casa	Assiduidade/Pontualidade; Empenho/Participação
70%	20%	10%
Nota: Na ausência de instrumentos de avaliação de um dos parâmetros, o peso que lhe está atribuído será distribuído proporcionalmente pelos outros parâmetros		

A escola propõe-se também seguir as melhores práticas de avaliação das aprendizagens:

> A avaliação da aprendizagem compreende as modalidades de avaliação diagnóstica, de avaliação formativa e de avaliação sumativa (interna). A avaliação diagnóstica realiza-se no início do 10ºano e sempre que seja considerado oportuno. A avaliação formativa assume caráter contínuo e sistemático, recorre a uma variedade de instrumentos de recolha de informação adequados à diversidade da aprendizagem e às circunstâncias em que ocorrem. A avaliação formativa determina a adoção de medidas pedagógicas adequadas às características dos alunos e à aprendizagem a desenvolver. A avaliação sumativa (interna) traduz-se na formulação de um juízo global sobre a aprendizagem realizada pelos alunos, tendo como objetivo a sua classificação. (ESPAN, Matemática A, Critérios de Avaliação, 11.º anos)

O Conselho Pedagógico do Agrupamento de Escolas Queluz Belas (AEQB), decidiu ainda, de acordo com a legislação em vigor, adotar a seguinte nomenclatura para os diversos instrumentos de avaliação aplicados no ensino secundário (Quadro 3-8):

Quadro 3-8: Nomenclatura adotada para os instrumentos de avaliação (ESPAN 2018/19)

Mau	Medíocre	Suficiente	Bom	Muito Bom
0 a 4	5 a 9	10 a 13	14 a 17	18 a 20

Acrescenta ainda o mesmo documento normativo sobre avaliação, que “a classificação final de cada período é quantitativa e deve refletir todo o trabalho desenvolvido pelos alunos desde o início do ano até essa data. Tendo em conta o carácter globalizante dos testes escritos aplicados em cada período e com o objetivo de valorizar a progressão dos alunos, os docentes aprovaram ainda a seguinte ponderação:”

- A classificação final do 1.º período resulta da ponderação dos vários instrumentos de avaliação aplicados, arredondada às unidades;
- A classificação final do 2.º período resulta de uma média ponderada - pesos 1 e 2, respetivamente - das médias dos 1.º e 2.º períodos, arredondada às unidades;
- A classificação final do 3.º período resulta de uma média ponderada - pesos 1, 2 e 2, respetivamente - das médias dos 1.º, 2.º e 3.º períodos, arredondada às unidades.

O abandono escolar tem vindo a regredir de forma consistente e significativa, não sendo menor pelo facto de alguns dos imigrantes regressarem ao país de origem, reemigrarem para outros países, sobretudo da União Europeia, ou ainda por ausência de título de residência. Assim, o abandono escolar está normalmente sobreavaliado, incluindo a saída do país, nem sempre comunicada.

A ESPAN é assim uma instituição que dispõe de recursos materiais e humanos que lhe permitem cumprir a sua missão educativa e de intervenção social na comunidade em que está inserida.[1]

Caracterização da Turma

A turma onde o estudo foi realizado pertence ao 11.º ano do Ensino Secundário, curso de Ciências Socioeconómicas, disciplina de Matemática A. Começou por ter 12 alunos (uma aluna nunca compareceu), tendo terminado o primeiro período com 18 (um dos quais nunca chegou a ser avaliado), pelo facto de alguns alunos terem chegado à escola mais tarde, outros decidiram inscrever-se à disciplina porque não obtiveram aproveitamento ou para melhorar a classificação atual. São 8 rapazes e 10 raparigas, com idades compreendidas entre os 15 e os 18 anos, situando-se a média em 16,5 anos (Quadro 3-9).

[1] Informação mais pormenorizada sobre os princípios orientadores, plano de ação, monitorização do projeto educativo da escola e plano estratégico de melhoria pode ser consultada no site do Agrupamento na internet (http://www.espan.edu.pt/?page_id=125).

Quadro 3-9: Distribuição de idades dos alunos da turma do 11.º ano

Idades	Nº de Alunos
15	1
16	10
17	4
18	3

Existem alunos com retenções em anos anteriores. Alguns estão a frequentar a escola pela primeira vez. Não há qualquer aluno com Necessidades Educativas Especiais.

O nível socioeconómico da turma é no geral médio-baixo, concordante com a caracterização da escola e da envolvente urbana. Há também alunos provenientes dos PALOP, nenhum de países cuja língua oficial não seja o Português. Em termos do trabalho em sala não se notam insuficiências, todos os alunos se apresentam com o material de estudo requerido para cada aula, nomeadamente caderno diário, manual da disciplina e calculadora.

No que respeita ao comportamento, a turma não apresenta qualquer problema. Há apenas um aluno que se ausenta frequentemente ao estrangeiro e por isso tem fraca assiduidade. Embora o nível de motivação não seja uniforme, os alunos mostram-se genericamente interessados e participam ativamente nas atividades e tarefas para que são solicitados. O ambiente de trabalho é bom, havendo uma excelente relação entre o professor cooperante e a turma. Embora a maioria dos alunos já se conheça de anos anteriores, provêm de turmas distintas e alguns já foram alunos do professor cooperante, mas não no Ensino Secundário.

Os alunos trabalham habitualmente em grupo de dois alunos. Os grupos são definidos pelo professor cooperante e integram alunos com aproveitamento diferenciado. Os grupos são alterados com periodicidade aproximadamente mensal (ou no final de cada subdomínio), de forma que cada aluno tenha possibilidade de trabalhar sucessivamente com diferentes colegas.

Apresenta-se a seguir a classificação individual dos alunos no final do primeiro período letivo (Figura 3-2), bem como os resultados do miniteste de avaliação realizado no final das seis aulas supervisionadas sobre limites de funções reais de variável real (Figura 3-3).

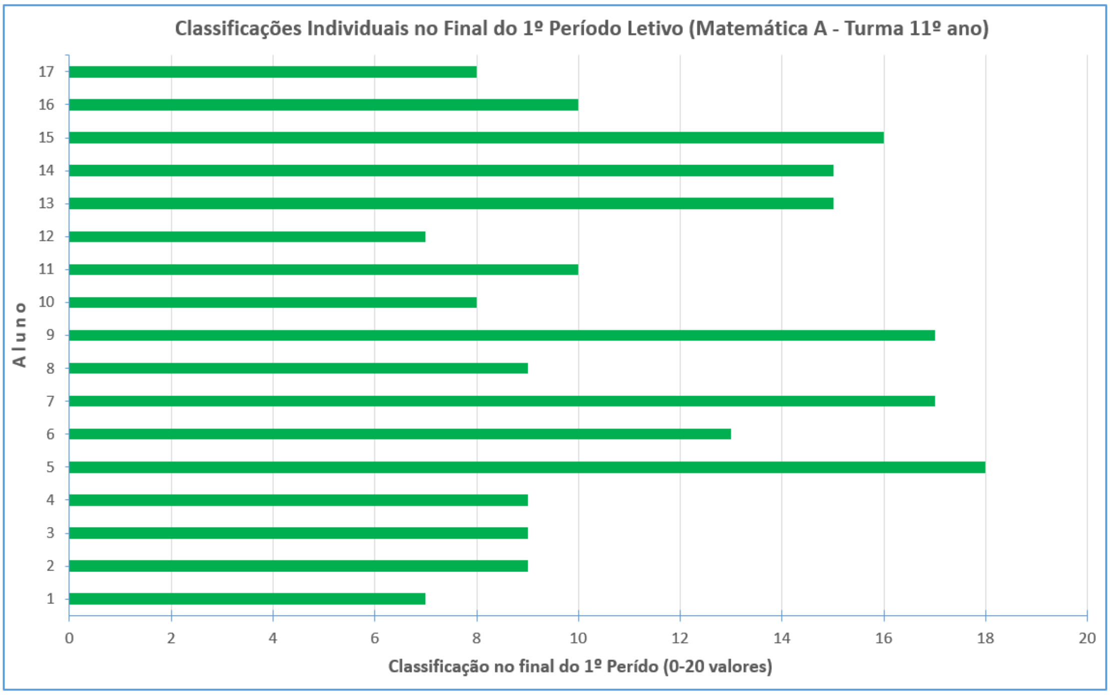


Figura 3-2: Classificação dos alunos da turma no final do 1.º período letivo

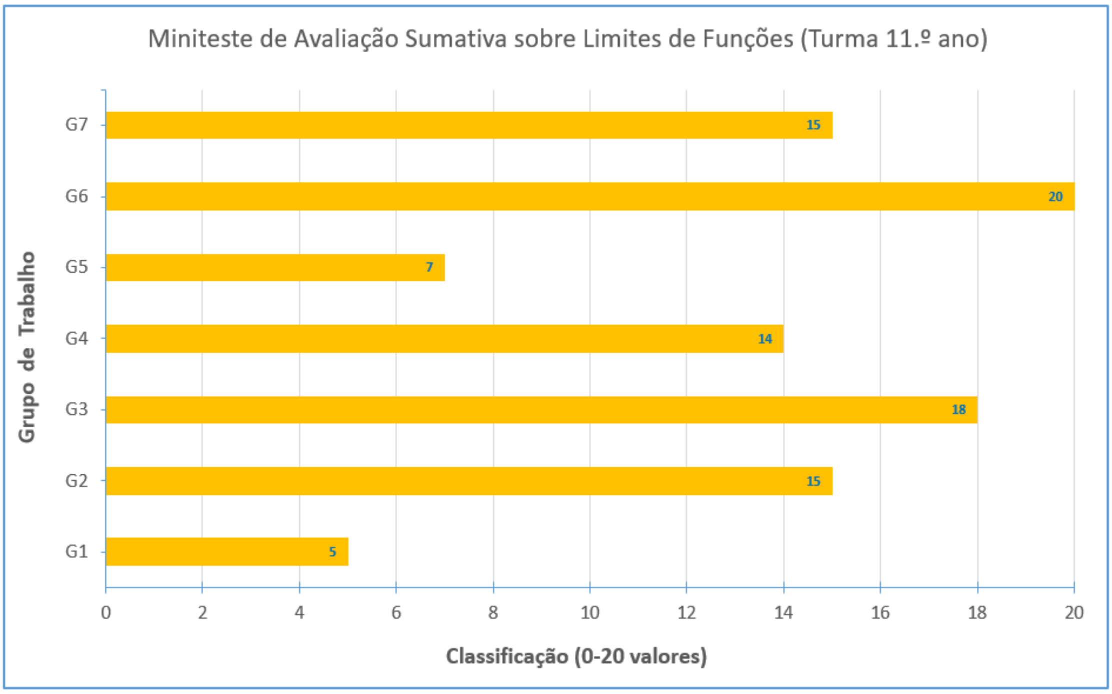


Figura 3-3: Classificação dos grupos de trabalho da turma do 11.º ano no miniteste de avaliação sobre limites de funções reais de variável real

O aproveitamento é muito heterogéneo, predominando as notas abaixo dos 10 valores. Apenas três alunos têm manifestado resultados consistentes acima dos 15 valores. Para além das lacunas de aprendizagem e consolidação de conteúdos de anos anteriores, denota-se falta de hábitos regulares de trabalho fora da aula. No entanto alguns alunos frequentam aulas privadas de recuperação a Matemática.

Toda a turma trabalha bem em aula, de forma cooperativa e participante, havendo um excelente relacionamento com o professor. Adaptam-se bem à realização de tarefas exploratórias e exercícios de aplicação propostos. O professor incentiva a comunicação e intervenção dos alunos, quer oralmente quer através da deslocação ao quadro para correção e apresentação de resultados.

Em termos gerais, são no entanto notórias as dificuldades à disciplina. É frequente haver uma apreensão razoável de novos conteúdos, mas logo surgem enormes dificuldades ao nível do cálculo, principalmente nas propriedades das operações algébricas, manipulação e simplificação de expressões, o que dificulta e exige muito tempo extra na aplicação dos conhecimentos adquiridos. O facto de a turma ser bastante heterogénea torna difícil adotar ritmos de trabalho que se adaptem à maioria dos alunos. Existem também limitações importantes a nível do domínio da Língua Portuguesa, que se manifesta de forma mais evidente na dificuldade em interpretar corretamente os enunciados escritos.

Ancoragem da subunidade de ensino no programa da disciplina

A matemática é uma disciplina que, pelas suas características próprias, exige grande cuidado e atenção em termos curriculares, didáticos e pedagógicos. Não é fácil, por exemplo, efetuar alterações no encadeamento dos conteúdos, pois os riscos em termos de resultados na aprendizagem podem ser consideráveis. De facto, há que tomar em consideração não apenas a sequência em que os conhecimentos devem ser apresentados e apreendidos, mas igualmente o estado de maturidade cognitiva e psicológica dos alunos. Talvez esse seja um dos motivos pelo qual, no programa e metas curriculares para o ensino secundário é referido que os mesmos

> ‘…respeitam a estrutura cumulativa que é característica da disciplina de Matemática, apoiando-se os novos conhecimentos em outros previamente estudados e adquiridos. De acordo com a investigação recente na área do ensino da Matemática, é desta forma progressiva que se pode ir desenvolvendo a compreensão, ou seja, que se pode ir construindo uma sólida rede de factos, conceitos, relações e procedimentos suscetível de ser mobilizada, de forma flexível, em diversos contextos.’ (ME, 2013, p.3)

O conceito de limite é comummente reconhecido como simultaneamente complexo e fundamental a quem pretenda seguir estudos superiores na área científica.

Considera-se que os alunos do 11.º ano estão em condições de ter o primeiro contacto com o conceito. No entanto, apenas o programa de 'Matemática A' aborda esta temática. Efetivamente, os programas de matemática do ensino secundário para os cursos na área das Ciências Sociais e Humanas (ME, 2001) ou os designados Cursos Tecnológicos (ME, 2004/5), não incluem o conceito de limite nem as suas múltiplas aplicações posteriores a conceitos como continuidade ou derivada. É pois assumido que a noção de limite é estrutural e indispensável a quem ambiciona prosseguir os seus estudos científicos a nível universitário.

O domínio Funções Reais de Variável Real é precedido pelo domínio das Sucessões. Aqui os alunos definem o conceito de sucessão como uma extensão das sequências do ensino básico. Antes de abordar a noção de limite de uma sucessão, os alunos são confrontados com a definição de minorante, majorante, mínimo e máximo de um conjunto, bem como de conjunto limitado. Estas noções são depois naturalmente aplicadas às sucessões para definir sucessões monótonas e limitadas. Como exemplos de sucessões definidas por recorrência, as sucessões aritméticas e geométricas são objeto de estudo aprofundado com exercícios de aplicação e consolidação.

Uma vez que o programa adota a definição de Heine para limite de uma função real de variável real, é fundamental que os alunos tenham bem consolidados os conhecimentos que adquiriram imediatamente antes relativamente ao limite de sucessões, álgebra de limites e técnicas de levantamento de indeterminações. Terão igualmente de mobilizar os conhecimentos de lógica, álgebra e funções adquiridos no 10.º ano, como por exemplo o conceito de vizinhança de um ponto da reta real, operações sobre conjuntos, quantificadores, intervalos de monotonia, extremos de funções e operações algébricas sobre funções.

É também no domínio Sucessões que, pela primeira vez, os alunos são confrontados com diversos teoremas em que se exige que o desempenho 'Provar/Demonstrar' (ME, 2013) comece a assumir maior relevância relativamente ao que até aí sucedera no ensino secundário. Nos casos de menor dificuldade, as demonstrações são apresentadas no manual da disciplina logo a seguir aos enunciados, sendo o aluno incentivado a consultar anexos para os casos de maior complexidade. Há assim uma preocupação sistemática em que o aluno comece a interiorizar que a maioria das proposições matemáticas não pode ser aceite sem prévia demonstração rigorosa, apoiada em afirmações anteriores já submetidas à mesma metodologia.

Ainda no que respeita à ênfase em que os alunos comecem a preocupar-se em saber demonstrar os enunciados matemáticos a que recorrem, é precisamente a propósito da apresentação de algumas propriedades das sucessões que é introduzido o princípio de indução e o respetivo método de demonstração. No manual adotado da disciplina (Viegas & Valente, 2016), o princípio de indução precede e serve de suporte teórico à definição de sucessões por recorrência.

A aprendizagem do conceito de limite pode tirar imenso benefício do recurso à tecnologia. Os alunos são frequentemente convidados a efetuar representações gráficas das sucessões e interpretar intuitivamente a evolução das curvas apresentadas no mostrador da calculadora. Este recurso, especialmente quando associado à resolução de problemas práticos, dá uma ajuda inestimável não só à apreensão formal do conceito de limite, como também contribui para a perceção pelos alunos da utilidade da matemática como instrumento de modelação e aplicação a situações concretas do mundo real, uma das finalidades do ensino da matemática (ME, 2013).

As seis aulas supervisionadas que lecionei centraram-se na definição de limite de funções reais de variável real segundo Heine e na operatória sobre limites. Não foi possível, por falta de tempo, explorar convenientemente o levantamento de indeterminações e alguns teoremas mais elaborados, como o teorema do produto de uma função limitada por outra de limite igual a zero e o limite da função composta. No que respeita à definição de Heine, como já foi referido, a tónica foi evidenciar que o conceito de limite de uma função é essencialmente uma extensão e consolidação do que já tinha sido apresentado aos alunos a respeito das sucessões. As maiores novidades na aplicação do conceito a funções foram os limites laterais e limites no infinito.

Os alunos não mais deixarão de usar e aplicar amiúde o conceito de limite. Isso sucederá a propósito da continuidade, assíntotas ao gráfico de uma função e, de forma mais sistemática, na definição de derivada e suas aplicações. No 12.º ano aprofundarão o estudo de limites de sucessões e funções, seguirão para as derivadas de segunda ordem e respetivas aplicações a áreas exteriores à matemática como por exemplo a Física. Finalmente, no novo domínio ‘Primitivas e Cálculo Integral’, considerado como um complemento essencial do Cálculo Diferencial, os alunos terminam o ensino secundário com uma visão mais unificada e abrangente da Análise elementar (ME, 2013).

Pode assim concluir-se que o conceito de limite, uma vez introduzido para as sucessões, passa a estar omnipresente, ainda que muitas vezes de forma implícita, em praticamente todos domínios e subunidades de conteúdos subsequentes. Tal como se refere logo no início do programa e metas curriculares para o ensino secundário, o conceito de limite merece atenção especial em curricula de outros países, não só pela sua relevância como tópico matemático transversal, mas igualmente pelas consequências negativas da sua incorreta aprendizagem (ME, 2013, Introdução).

Em termos de planeamento anual da Matemática na escola (AEQB-ESPAN, Planificação Anual 11.º ano - Matemática A - 2018/2019), há uma concordância, no que ao total de tempos letivos diz respeito, com as recomendações contidas no programa e metas curriculares de Matemática A do ensino secundário (ME, 2013). No plano para o ano letivo 2018/2019, estão previstos 43 tempos letivos (45 minutos cada) para o domínio Funções Reais de Variável Real. Neste, o subdomínio dedicado ao limite segundo Heine, preenche 5 aulas (10 tempos), ou seja, aproximadamente 25% do planeamento total do domínio. É curioso verificar que são sensivelmente equivalentes os tempos reservados ao limite de sucessões e ao limite de funções, com ligeira predominância (3 tempos) para o limite de sucessões, o que é compreensível face à relevância das sucessões na definição de Heine. Mas o subdomínio com maior relevo no estudo das funções no 11.º ano é sem dúvida o das derivadas. Pesa mais de 50% no planeamento do domínio (22 tempos letivos), o que acentua a importância de uma correta prévia aprendizagem do conceito de limite pelos alunos.

Parece assim incontornável a importância de uma correta apreensão do conceito de limite logo nos primeiros contactos dos alunos com o tema. A tendência é aliás internacional. No sentido de alinhar o programa nacional com algumas opções curriculares já adotadas por outros países (nomeadamente alguns participantes no programa de avaliação internacional TIMSS-Advanced), procedeu-se ao reforço de alguns tópicos, como o do '…estudo de limites de sucessões e de funções, que, quando trabalhados de forma vaga e exageradamente intuitiva, levam com frequência à formação de conceções erradas e difíceis de reverter.' (ME, 2013, p.4).

Também o NCTM realça a importância do conceito de limite no ensino secundário. Na sua tabela de 'standards and expectations', é referida a necessidade de explorar e aplicar conceitos informais de aproximação sucessiva, limitação superior/inferior e limite em cenários de medição (NCTM, 2000).

Na preparação e planeamento das seis aulas supervisionadas, recorri essencialmente às recomendações e instruções contidas no Programa e Metas Curriculares para o Ensino Secundário e ao manual da disciplina adotado pela escola

(Viegas & Valente, 2016). O plano detalhado de cada uma das aulas encontra-se em anexo, no final do documento (Anexo 1 a Anexo 6).

Conceitos Fundamentais da Unidade de Ensino

Considerando as aulas lecionadas que constituem o fulcro do presente estudo, os conceitos fundamentais aludidos no domínio de conteúdo considerado (funções reais de variável real) foram os seguintes: noção de ponto aderente a um conjunto de números reais, limite (segundo Heine) de uma função e alguns teoremas fundamentais sobre limites facilitadores da resolução de exercícios e problemas (operatória sobre limites).

Ponto Aderente

A definição de ponto aderente a um conjunto de números reais é uma noção introdutória fundamental, na medida em que facilita a notação e linguagem matemática quando for necessário explicar a possibilidade de existência de limite de uma função num ponto. Assim, só faz sentido averiguar da existência de limite de uma função num ponto, se este for aderente ao domínio da função, isto é, 'se estiver suficientemente perto' do domínio. Esta 'proximidade' traduz-se na necessidade de existir uma sucessão, pelo menos, de elementos do conjunto (neste caso o domínio da função) que convirja para o ponto.

A definição adotada de ponto aderente está obviamente alinhada com a de limite segundo Heine. De facto, não é indispensável invocar sucessões para definir ponto aderente a um conjunto. Os alunos já conhecem, de anos anteriores, a definição de vizinhança e seria possível mobilizá-la para definir ponto aderente. Aliás, do ponto de vista meramente semântico e imagético, 'vizinhança' e 'aderência' remetem para representações mentais semelhantes. Desta forma e a título de curiosidade, foram apresentadas as duas definições, ainda que com ênfase na que recorre a sucessões (Anexo 4, Ficha de Trabalho nº 4). O próprio manual da disciplina exibe, em curta nota lateral, a definição invocando a noção de vizinhança (Viegas & Valente, 2016, vol.3, p.8).

Ponto Aderente (definição recorrendo ao conceito de sucessão)

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é **ponto aderente** a A, se existir uma sucessão de elementos de A convergente para a.
Designa-se por **aderência** de A o conjunto dos pontos aderentes a A.

Desta definição decorre imediatamente que qualquer elemento do conjunto A é ponto aderente desse mesmo conjunto, dado que a sucessão constante constituída por esse elemento é convergente (para o valor do único comum a todos os termos da sucessão). Quando o ponto a não é elemento de A, pode ou não ser-lhe aderente. Por exemplo, a aderência do conjunto $A =]2,7]$ é o intervalo [2,7], isto é, o ponto 2 é aderente ao conjunto A mas não lhe pertence.

Ponto Aderente (definição recorrendo ao conceito de vizinhança)

Existem outras definições possíveis de ponto aderente. A que recorre à noção de vizinhança de um ponto (da reta real) é também acessível aos alunos, uma vez que usa conceitos já conhecidos.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é **ponto aderente** a A, *se e só se* em qualquer vizinhança de a existir pelo menos um elemento de A.

Alguns autores usam uma terminologia diferente para ponto aderente. Por exemplo, pode também ser conhecido por '*ponto limite*' ou '*ponto de acumulação*' de um dado conjunto.

Limite segundo Heine

A definição de limite segundo Heine permite efetuar uma transição, suave e natural, entre o limite de sucessões (matéria dada no módulo curricular anterior) e o limite de funções. Efetivamente, segundo Heine, o limite 'L' de uma função num ponto aderente ao seu domínio (incluindo os casos de mais ou menos infinito para funções de domínio não majorado ou minorado, respetivamente) existe, se todas as sucessões imagem de sucessões objeto convergentes para o ponto convergirem para 'L'. 'L' começa por ser um número real, estendendo-se depois a definição aos casos em que o limite da função é mais ou menos infinito.

Dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$ que seja ponto aderente ao domínio, D_f, de f, diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é **limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$** quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f, convergente para a, a sucessão $(f(x_n))$ tende para b.

Se existir limite de $f(x)$ quando x tende para a esse *limite é único* e representa-se por $\lim_{x \to a} f(x)$. De acordo com a definição acima, escrever-se-ia $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

A **unicidade do limite de uma função** explica-se facilmente a partir do mesmo teorema já apresentado aos alunos para sucessões. Com efeito, se $\lim_{x \to a} f(x)$ pudesse tomar simultaneamente os valores distintos b e c, então, dada uma sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $(f(x_n))$ teria de convergir, também simultaneamente, para b e c, o que contraria o teorema da unicidade do limite de uma sucessão.

A definição acima de limite (segundo Heine) aplica-se aos casos em que tanto a como b são números reais. Tal qual se fez para as sucessões, é imediato efetuar a extensão da definição aos casos em que $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, desde que seja possível considerar sucessões, com todos os termos em D_f, que tendam para mais ou menos infinito, respetivamente. Neste caso a notação será, naturalmente, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, respetivamente, e o domínio da função f não é limitado.

De forma semelhante, podemos também estender a definição de Heine a limites infinitos. Nesse caso será b (em vez de a) que pode tomar os 'valores' mais ou menos infinito, ou seja, é a sucessão de imagens $(f(x_n))$ que tende para infinito. Em termos de notação, teremos agora $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e o contradomínio da função f não é limitado.

Evidentemente que podemos ter outras combinações das situações anteriores, por exemplo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Limites laterais

O conceito de limite lateral deverá ser também introduzido, recordando aos alunos os exemplos de sucessões convergentes em que todos (ou a partir de certa ordem) os termos da sucessão eram menores (ou maiores) que o respetivo limite. Os alunos serão agora convidados a aplicar a definição de Heine a restrições adequadas (quer dizer, à esquerda e à direita do ponto de aderência em que o limite está a ser estudado) da função no seu domínio. Surge assim, de forma natural, a definição de limite lateral.

Dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$:

- se a é ponto aderente a $D_f \cap]-\infty, a[$, diz-se que b (número real, menos ou mais infinito) é **limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$ por valores inferiores a $\boldsymbol{a}$**, ou que **$\boldsymbol{b}$ é limite de $\boldsymbol{f(x)}$ à esquerda de $\boldsymbol{a}$**, se $b = \lim\limits_{x \to a} f_{|]-\infty,a[}(x)$ e escreve-se, mais sinteticamente, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.

- se a é ponto aderente a $D_f \cap]a, +\infty[$, diz-se que b (número real, menos ou mais infinito) é **limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$ por valores superiores a $\boldsymbol{a}$**, ou que **$\boldsymbol{b}$ é limite de $\boldsymbol{f(x)}$ à direita de $\boldsymbol{a}$**, se $b = \lim\limits_{x \to a} f_{|]a,+\infty[}(x)$ e escreve-se, mais sucintamente, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$.

Os limites de $f(x)$ à esquerda e à direita de a, designam-se normalmente por **limites laterais** da função f quando x tende para a. Tal qual se demonstrou para o limite (bilateral) de uma função, cada limite lateral, se existir, tem de ser único.

Resulta igualmente da definição de limite de uma função que, **se os limites laterais de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$ forem diferentes, então não pode existir limite da função quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$**. Com efeito, se tal fosse possível, existiriam pelo menos duas sucessões de elementos de D_f, tendentes para a (uma com todos os termos à esquerda de a e outra com todos os termos à direita de a), cujas sucessões imagem convergiam para limites diferentes. Ora isso contrariaria a definição de Heine, pelo que a função não poderia ter limite em a.

A adoção da definição de Heine tem assim a enorme vantagem de apenas exigir aos alunos que mobilizem os conhecimentos que aprenderam sobre limites de sucessões, quer dizer, o conceito de limite de uma função é construído inteiramente a partir do de limite de uma sucessão. No que aos limites diz respeito não há nada de inovador na nova definição. Evidentemente que se reclama aos alunos, em contrapartida, conhecimentos consolidados sobre o que é uma função, suas características e propriedades (função como operação ou relação entre conjuntos, domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objeto, imagem, função composta, etc). Ponto chave na assimilação da definição de Heine, é entender que a imagem de uma sucessão de objetos é, pela função, também uma sucessão, cujos termos são precisamente os transformados de cada um dos termos da sucessão de partida.

Se a definição de Heine é uma escolha natural de continuidade na exploração e consolidação do conceito de limite de sucessões, acrescenta à função cujo limite se pretende definir, mais duas funções digamos auxiliares (sucessão objeto e imagem) que o aluno de alguma forma terá de 'compor' com a função em estudo. Este 'alinhamento' de funções introduz uma complexidade adicional, externa à definição de limite propriamente dita, que não é facilmente gerida e ultrapassada por alguns alunos.

Assim, do ponto de vista didático, o maior desafio colocado ao professor em termos de ensino-aprendizagem do conceito de limite (de uma função) segundo Heine, é tentar que os alunos mobilizem adequadamente os conhecimentos recentes sobre limites de sucessões e, de forma encapsulada (no sentido adotado por [Dubinsky, 2002], isto é, como uma espécie de bloco de conhecimento já interiorizado), os apliquem ao que já sabem de anos anteriores sobre funções reais de variável real. Para muitos alunos, a maior dificuldade é precisamente este encapsulamento e a transposição funcional entre sucessão objeto e sucessão imagem. Os alunos parecem ficar baralhados por a definição combinar os conceitos de sucessão e função, evidenciando alguma surpresa com o facto de permanecer a alusão a limites de sucessões quando essa matéria foi explorada e aparentemente 'encerrada' no domínio temático anterior.

Existem outras definições de limite de uma função. A mais conhecida e divulgada no ensino superior é a formulação de Cauchy, que recorre à noção de vizinhança (e também pressupõe que o ponto a é aderente a D_f):

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \boldsymbol{sse} \quad \forall\, \delta > 0, \exists\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}\, (x \in D_f \wedge |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta)}$$

A definição original de Cauchy excluía explicitamente o ponto a (isto é, acrescentava a condição $x \neq a$), como ainda hoje fazem alguns autores, reservando a expressão acima para a definição de continuidade no ponto a, caso em que o limite tem de existir e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Por uma questão prática e de maior generalidade, considero preferível não efetuar qualquer restrição e apenas referir que x deve pertencer ao domínio da função.

As formulações de Heine e Cauchy (na versão plasmada na expressão acima) são equivalentes (Silva, 1978). Considero a definição de Cauchy mais sugestiva que a de Heine para compreender a noção de continuidade, tema que se segue ao estudo dos limites de sucessões e funções, no programa do 11.º ano do ensino secundário.

Teoremas Fundamentais sobre Limites

A aplicação sistemática da definição de limite (segundo Heine) na resolução de exercícios e problemas envolvendo limites é impraticável. Por isso, tal como foi feito para o limite de sucessões, é indispensável recorrer a um conjunto de teoremas que constituem a chamada 'álgebra de limites'. Começa-se pelo limite da função constante, depois a função identidade, seguindo pela adição de funções, produto e quociente. Ilustra-se com exemplos práticos de aplicação, socorrendo-se essencialmente de funções polinomiais e racionais.

Dois teoremas adicionais importantes, também usados na operatória sobre limites, são o do produto de uma função limitada por outra de limite nulo e o teorema do limite da função composta. Tal como nos casos anteriores, as demonstrações seguem (sempre que tal for possível) exatamente a mesma metodologia adotada para teoremas homólogos apresentados no domínio temático das sucessões, embora seja agora exigido aos alunos que recordem as regras de composição de funções.

A aplicação destes teoremas permitirá aos alunos calcular o limite de expressões algébricas (representação mais comum de uma relação funcional), quer de forma direta, quer com recurso prévio a manipulações e técnicas com vista ao levantamento de situações de indeterminação.

Limite da função constante

O limite de uma **função constante** é igual à constante k que a define, em qualquer ponto aderente ao domínio e, caso faça sentido, também em $+\infty$ e $-\infty$.

Como a função é constante, qualquer sucessão de elementos do seu domínio que seja convergente, tem como sucessão imagem uma sucessão constante, convergente para o valor constante da função. A demonstração de que qualquer sucessão constante é convergente foi feita no estudo das sucessões.

Os casos de convergência em mais e menos infinito, aplicam-se quando o domínio da função não é majorado e minorado, respetivamente:

- D_f não é majorado, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ (ou seja, $\lim_{x\to+\infty} k = k$)

- D_f não é minorado, então $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$ (ou seja, $\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$)

Limite da função identidade

O limite de uma função f tal que $\forall\, x \in D_f, \boldsymbol{f(x) = x}$, em qualquer ponto a aderente ao domínio, é igual a a, ou seja, abreviadamente, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} x = a}$.
Se o domínio de f não for majorado (respetivamente, minorado), então $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ (respetivamente, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$).

De facto, se (u_n) é uma qualquer sucessão de valores do domínio de f com limite a ou limite $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), então a sucessão $(f(u_n))$ também converge para a ou para $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), uma vez que $\big(f(u_n)\big) = (u_n)$.

Teorema do limite da soma

Dadas funções f e g e sendo a um ponto aderente ao domínio da função soma $f + g$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), se o domínio de $f + g$ não for majorado (respetivamente, minorado), então, se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existem e pertencem a $\mathbb{R}$, tem-se

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a}(f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)}$$

A demonstração deste teorema decorre imediatamente de teorema semelhante já enunciado e provado para o limite da soma de duas sucessões. Pode igualmente generalizar-se a qualquer número finito de parcelas. Apresenta-se a demonstração como exemplo. Dispensar-se-á nos teoremas seguintes sempre que resultar de resultado semelhante já obtido para as sucessões.

Seja (x_n) uma qualquer sucessão convergente para a. Por hipótese, sabemos que as sucessões $\big(f(x_n)\big)$ e $\big(g(x_n)\big)$ são ambas convergentes, para $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, respetivamente. Então, pelo teorema do limite da soma de duas sucessões, podemos concluir que a sucessão soma $\big(f(x_n) + g(x_n)\big)$ é também convergente e tem como limite a soma dos limites das sucessões parcelas. Mas como, por definição, $f(x_n) + g(x_n) = (f + g)(x_n)$, e atendendo a que a sucessão x_n escolhida foi qualquer, podemos concluir (pela definição de Heine), como pretendíamos, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a}(f + g)\,(x)$.

Tem-se ainda que, se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$, desde que exista $\lim_{x\to a} g(x)$ e este limite não seja $-\infty$. Pode formular-se enunciado semelhante no caso de $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Abreviadamente, e de forma análoga ao que foi mostrado para as sucessões, podemos assumir as seguintes regras (admite-se a comutatividade da adição):

- $+\infty + \infty = +\infty$
- $+\infty + b = +\infty,\ b \in \mathbb{R}$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $-\infty + b = -\infty,\ b \in \mathbb{R}$

A propósito das quatro operações básicas sobre funções, convém recordar que, dadas as funções f e g, de domínios D_f e D_g, respetivamente, tem-se

- $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$
- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ e $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Das definições acima de domínio de cada uma das operações sobre funções, decorre que se a é ponto aderente ao domínio da função resultante da operação, é igualmente aderente ao domínio de cada um dos operandos (pois este último contém sempre aquele).

<u>Indeterminação $\infty - \infty$</u>

No caso de $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ (ou vice-versa), nada se pode afirmar, à priori, acerca de $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$, isto é, torna-se necessário recolher mais informação sobre cada uma das funções. O limite da soma pode ser real, mais ou menos infinito, ou até não existir. Daí, tal como sucedeu para as sucessões, se designar este cenário como uma indeterminação (de tipo '$\infty - \infty$').

Existem várias técnicas para apurar o limite da função soma no caso de se obter esta indeterminação, isto é, resolver ou 'levantar' a indeterminação. De novo, são técnicas semelhantes às já aprendidas e aplicadas a propósito do limite de operações sobre sucessões.

Indeterminação do tipo $\infty - \infty$ *com funções polinomiais*

Apresenta-se um teorema para funções polinomiais cuja demonstração é análoga à de teorema semelhante para sucessões definidas a partir de polinómios (ver adiante o teorema do limite do produto).

O limite de uma função polinomial, quando a sua variável tende para $+\infty$ ou para $-\infty$, é igual ao limite do termo de maior grau, quando a variável tende para $+\infty$ ou para $-\infty$ (respetivamente), ou seja, dada uma função polinomial f definida por ($a_0 \neq 0$)

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to+\infty} (\boldsymbol{a_0\, x^n}) \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to-\infty} (\boldsymbol{a_0\, x^n})$$

Indeterminação do tipo $\infty - \infty$ *com funções racionais (não polinomiais)*

Neste caso a técnica com maior sucesso consiste em efetuar a operação reduzindo as parcelas ao mesmo denominador. Exemplos:

$$\lim_{x\to0^-} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1} \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Indeterminação do tipo $\infty - \infty$ *com expressões que envolvem radicais*

Aqui, também como se constatou para o caso das sucessões, a melhor estratégia é racionalizar a expressão (conveniente) que contém o radical, multiplicando-a pelo par conjugado (tendo obviamente o cuidado de obter uma expressão equivalente à inicial). Exemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2} + x\right)$$

Teorema do limite do produto

Dadas funções f e g e sendo a um ponto aderente ao domínio da função produto $f.g$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), se o domínio de $f.g$ não for majorado (respetivamente, minorado), então, se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem e pertencem a $\mathbb{R}$, tem-se

$$\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$$

Mais uma vez, o teorema acima demonstra-se com recurso ao teorema correspondente para o produto de duas sucessões. Pode igualmente generalizar-se a um número qualquer finito de fatores. Como caso particular, é agora possível afirmar o seguinte:

Dada uma **função polinomial f** e sendo a um número real, tem-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Combinando o teorema da soma com o do produto, podemos construir um teorema para o limite da diferença de duas funções e concluir que $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.

Tem-se ainda que, se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e se existir $\lim_{x\to a} g(x)$ e este limite não for zero, então $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = -\infty$, conforme o sinal de $\lim_{x\to a} g(x)$ for positivo ou negativo, respetivamente. Pode formular-se enunciado semelhante no caso de $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Abreviadamente, e de forma análoga ao que foi mostrado para as sucessões, podemos assumir as seguintes regras (admite-se a comutatividade do produto):

• $(+\infty).(+\infty) = +\infty$	• $(-\infty).(-\infty) = +\infty$	• $(+\infty).(-\infty) = -\infty$
• $(+\infty).b = +\infty,\ b \in \mathbb{R}^+$	• $(-\infty).b = -\infty,\ b \in \mathbb{R}^+$	
• $(+\infty).b = -\infty,\ b \in \mathbb{R}^-$	• $(-\infty).b = +\infty,\ b \in \mathbb{R}^-$	

Estando a tratar-se do limite do produto, faz sentido enunciar aqui o **teorema do limite da potência e da raiz** (potência de expoente racional) de uma função real de variável real:

Dada uma função f, um **número racional $\boldsymbol{r}$** e sendo a um ponto aderente ao domínio da função potência f^r, ou sendo $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), se o domínio de f^r não for majorado (respetivamente, minorado), então, se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existir e pertencer a $\mathbb{R}^+$, tem-se

$$\lim_{x \to a}(f^r)(x) = [\lim_{x \to a} f(x)]^r$$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe **e pertence a** $\mathbb{R}_0^+$, então ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

O último resultado é válido para qualquer valor real de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, caso n seja ímpar.

Regressando ao produto de duas funções, caso um dos fatores tenda para zero e o outro para mais ou menos infinito, não é possível determinar (ou mostrar que não existe) $\lim\limits_{x \to a}(f.g)(x)$ sem mais informação sobre as funções. Trata-se de outro caso de indeterminação, normalmente referenciado por '$\mathbf{0} \times \infty$'.

<u>Indeterminação $\mathbf{0} \times \infty$</u>

As indeterminações do tipo $0 \times \infty$ envolvendo funções racionais, resolvem-se normalmente convertendo a indeterminação num dos tipos $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (ver teorema do limite do quociente, mais adiante) e aplicando de seguida as técnicas de levantamento para estas últimas. Exemplos:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2-4} . \frac{x}{3}\right)$ converte-se em $\frac{\infty}{\infty}$ efetuando o produto.

$\lim\limits_{x \to 1} \left[(x^2 - 1) . \frac{1}{2x-2}\right]$ também se converte em $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ efetuando o produto.

Teorema do limite do quociente

Dadas funções f e g e sendo a um ponto aderente ao domínio da função quociente $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), se o domínio de $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ não for majorado (respetivamente, minorado), então, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem e pertencem a $\mathbb{R}$, sendo $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0}$, tem-se

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}}$$

Tal como para a soma e produto de funções, a demonstração do limite do quociente apoia-se na prova análoga efetuada para o limite do quociente de duas sucessões.

O quociente é a operação elementar mais complexa, por isso não admira que exista um maior número de cenários a considerar.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e se existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ **e não é infinito nem zero**, tem-se $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = -\infty$, dependendo do sinal de $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Este resultado estende-se ao caso de $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^-$, uma vez que em ambos os casos o sinal algébrico está definido. Pode formular-se um enunciado idêntico para o caso de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ e se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **e não é infinito**, tem-se $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = 0$.

Os enunciados anteriores podem também abreviar-se através de uma escrita simbólica sugestiva, ainda que não formalmente rigorosa, do seguinte modo:

- $\frac{\pm\infty}{b} = \pm\infty,$ se $b \in \mathbb{R}^+$
- $\frac{b}{0^+} = +\infty$ e $\frac{b}{0^-} = -\infty,$ se $b \in \mathbb{R}^+$ ou $b = +\infty$
- $\frac{b}{0^+} = -\infty$ e $\frac{b}{0^-} = +\infty,$ se $b \in \mathbb{R}^-$ ou $b = -\infty$
- $\frac{\pm\infty}{b} = \mp\infty,$ se $b \in \mathbb{R}^-$
- $\frac{b}{\pm\infty} = 0,$ se $b \in \mathbb{R}$

As notações 0^+ e 0^- são usadas para ilustrar os casos em que a função tende para zero por valores positivos e negativos, respetivamente. A exigência de enquadramento do limite num destes cenários obriga, frequentemente, à determinação de limites laterais (no ponto de anulamento da função denominador).

Indeterminações dos tipos ∞/∞ e $0/0$

Se as duas funções que constituem o quociente têm limites infinitos (independentemente do sinal) ou se tendem ambas para zero, não é possível determinar o limite do quociente (ou provar que não existe) sem uma análise mais cuidada de ambas as funções na expressão. São mais dois casos de indeterminação do limite. Vão indicar-se de seguida algumas técnicas de 'levantamento' deste tipo de indeterminações.

Indeterminação do tipo ∞/∞ com funções racionais

Se as funções f e g são ambas polinomiais, a aplicação dos teoremas anteriores (álgebra dos limites) a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f}{g}(x)$, ou a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f}{g}(x)$, conduz a uma indeterminação do tipo ∞/∞. Tal como no caso do limite das funções polinomiais, quando a variável independente tende para mais ou menos infinito, também aqui se apresenta um resultado geral, idêntico ao enunciado no estudo de limites de sucessões.

Dadas as funções polinomiais f e g, definidas genericamente por ($a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$)

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

e

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-2}x^2 + b_{m-1}x + b_m$$

então

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Este teorema, sobre o limite do quociente de funções polinomiais, demonstra-se usando uma técnica semelhante à que foi utilizada na demonstração de teorema análogo sobre sucessões.

Indeterminação do tipo ∞/∞ com expressões que envolvem radicais

Não existe propriamente uma 'receita' para este tipo de cenários. Apenas a prática e a observação cuidada de cada expressão permitem atingir o objetivo. É frequente seguir-se um caminho sem sucesso, caso em que importa tentar de novo seguindo uma estratégia diferente. Eis alguns exemplos, em que se eliminaram etapas em que é relativamente óbvia a aplicação dos teoremas já enunciados sobre 'álgebra dos limites':

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}}$$

Se decompusermos a fração em duas parcelas, a segunda tenderá para zero, ou seja, parece um caminho promissor no sentido de levantar a indeterminação original.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)=+\infty+0=+\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

Aqui é óbvio que, se extrairmos do radical a variável independente, deixamos de ter o mesmo tipo de indeterminação (porque é possível eliminar o $'x'$ do denominador, uma vez que o limite está a ser calculado 'longe de zero').

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$$

Atente-se que $\sqrt{x^2}=|x|$ porque estamos a considerar o ramo positivo da raiz quadrada. Depois fazemos $|x|=-x$, visto estarmos interessados no comportamento da expressão em valores (muito) negativos da variável independente.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}+x}}$$

Nesta situação seria excelente se pudéssemos fatorizar o denominador de modo a obter um fator em raiz quadrada da variável independente. E é relativamente fácil, pois existe um fator comum no denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}.\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+2}{x}}.0=1.0=0$$

Indeterminação do tipo ∞/∞ *envolvendo módulos*

A presença de módulos torna normalmente a resolução mais trabalhosa, mas a dificuldade reside precisamente em nos desenvincilharmos corretamente do módulo, após o que ficamos com expressões já contempladas noutros cenários desta indeterminação.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|2x-4|-x}{|3-x|}$$

Começar por reparar que, em termos do cálculo do limite, estamos a analisar o comportamento da expressão em valores (muito) negativos da variável independente. Sendo assim, como o argumento do módulo $|2x-4|$ toma valores negativos para $x<2$ e o do módulo $|3-x|$ toma valores positivos para $x<3$, podemos considerar que, para valores de 'x' muito negativos (ou 'próximos' de menos infinito)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|2x-4|-x}{|3-x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(2x-4)-x}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-x}=3$$

Na última passagem aplicou-se o teorema do limite do quociente de funções polinomiais.

Indeterminação do tipo $0/0$ *com funções racionais*

Neste cenário procura-se fatorizar numerador e denominador, de forma a expor (eventuais) fatores comuns e, por essa via, simplificar a expressão e ultrapassar a indeterminação. Exemplos:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{3x^3-3} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

Repare-se que a simplificação (corte do fator comum) é normalmente possível porque a raiz comum não pertence ao domínio da função racional (a divisão por zero é proibida no corpo dos reais).

Indeterminação do tipo $0/0$ *com expressões que envolvem radicais*

Tal como no caso anterior, procura-se alterar a expressão inicial de forma a surgirem fatores comuns que possam cancelar-se e, dessa forma, obter uma expressão equivalente em que a indeterminação já não esteja presente.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$$

Começar por verificar que o domínio da função é o intervalo $]2,+\infty[$. Em consequência, o limite acima, se existir, deverá coincidir com o limite lateral direito. Por factorização do numerador pode obter-se um fator comum a ambos os termos da fração.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2).(x-2).\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}.\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}(x+2).\sqrt{x-2}=4.0^+=0$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

Este caso exige alguma prática ou perspicácia, uma vez que não é evidente como poderemos gerar um fator comum. Mas se tentarmos racionalizar o numerador, multiplicando-o pelo seu binómio conjugado, a expressão vai simplificar-se.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right).\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3).\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)-4}{(x-3).\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Indeterminação do tipo $0/0$ *com módulos*

Mais uma vez, estas expressões não contêm (normalmente) situações novas relativamente às já exemplificadas, após terem sido libertadas da presença do(s) módulo(s). Mais um exemplo:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{|x+1|}$$

A remoção deste módulo não é tão simples como nos casos dos limites no infinito, uma vez que, neste caso, o limite está a ser avaliado num ponto em que o módulo se anula. A nossa função vai assim assumir duas expressões distintas em torno do ponto de abcissa -1 (que não pertence ao domínio):

$$\frac{x^2+x}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{-(x+1)}, & se \quad x+1<0\\ \\ \dfrac{x^2+x}{x+1}, & se \quad x+1>0\end{cases}=\begin{cases}-x, & se \ x<-1\\ \\ x, & se \ x>-1\end{cases}$$

Agora calculamos os limites laterais

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x}{|x+1|}=\lim_{x\to -1^-}(-x)=-(-1)=1$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+x}{|x+1|}=\lim_{x\to -1^+}x=-1$$

Como os limites laterais no ponto de abcissa -1 são diferentes, concluímos que não existe $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{|x+1|}$.

Teorema do produto de uma função limitada por outra de limite igual a zero

Dadas funções f e g, reais de variável real, e sendo a um ponto aderente ao domínio da função produto $f.g$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), se o domínio de $f.g$ não for majorado (respetivamente, minorado), se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ e $\boldsymbol{g}$ **é uma função limitada**, então

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}(f.g)(x)=0}$$

Este enunciado demonstra-se com recurso ao teorema relativo ao limite do produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para zero (infinitésimo) e fazendo uso da definição de limite segundo Heine.

Este teorema permite por exemplo concluir que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0}$ e que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0}$. Reparar que não é legítimo aplicar o teorema do limite do quociente, uma vez que não existe $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x}$. Com efeito, se selecionarmos as sucessões $\boldsymbol{u_n=2\pi n}$ e $\boldsymbol{v_n=u_n+\pi}$, ambas convergentes para $+\infty$, as respetivas sucessões imagem (pela função $\boldsymbol{\cos x}$) convergem para 1 e -1, respetivamente. Portanto, pela definição de Heine, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x}$ não existe. Com o mesmo raciocínio, concluir-se-ia o mesmo para a função seno (selecionando por exemplo o par de sucessões $\boldsymbol{u_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ e $\boldsymbol{v_n = u_n + \pi}$).

Usando o resultado acima e o teorema agora apresentado, pode igualmente calcular-se por exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{2x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}}{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}$$

Na penúltima igualdade aplicou-se o teorema do limite do quociente (seguido do relativo ao limite da soma), uma vez que já tínhamos provado a existência dos limites das funções $\frac{\cos x}{x}$ e $\frac{\sin x}{x}$ em mais infinito.

Teorema do limite da função composta

Dadas funções reais de variável real, $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$, e sendo a um ponto aderente ao domínio da função composta $\boldsymbol{g \circ f}$ (lê-se 'f seguida de g'), ou sendo $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), se o domínio de $\boldsymbol{g \circ f}$ não for majorado (respetivamente, minorado), se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, então

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$$

Para demonstrar este teorema, consideremos (x_n) uma sucessão qualquer, de termos pertencentes a $D_{g\circ f}$ e que convirja para o ponto aderente a. Então, dado que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (por hipótese), sabemos que a sucessão de imagens $\big(f(x_n)\big)$, pela definição de Heine, tende obrigatoriamente para b.

Por sua vez, dado que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ (também por hipótese), que a sucessão $\big(f(x_n)\big)$ tende para b e tem todos os seus termos em D_g (porque assumimos acima que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in D_{g\circ f}$, o que por sua vez implica que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \in D_g$), podemos concluir que a sucessão $\Big(g\big(f(x_n)\big)\Big)$ tende para c (também pela definição de Heine).

Como $\Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n})\big)\Big) = \big((\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x_n})\big)$, e como admitimos que (x_n) é uma sucessão qualquer de termos pertencentes a $D_{g\circ f}$, convergente para a, conclui-se, pela definição de Heine, que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = c}$.

Este teorema é útil no cálculo de alguns limites mais complexos, seja por aplicação direta ou através de uma técnica designada de 'mudança de variável'. Vejamos um exemplo em que surge uma indeterminação de tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$$

Vai aplicar-se o teorema acima, considerando $\boldsymbol{f(x)=\sqrt[3]{x}}$ e $\boldsymbol{g(x)=\frac{x-2}{x^3-8}}$, o que assegura que $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$ é a função de que pretendemos calcular o limite.

Ora

$$\lim_{x\to 8}f(x)=\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{8}=2$$

e

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{1}{12}$$

pelo que o teorema nos permite concluir que

$$\lim_{x\to 8}(g\circ f)\,(x)=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\frac{1}{12}$$

Poderíamos ter executado exatamente os mesmos passos de forma mais simples e intuitiva, recorrendo a uma 'mudança de variável'. Ao constatarmos a existência da indeterminação, chamávamos 'y' à função $f(x)$, isto é, consideramos $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{x}}$, $\boldsymbol{x=y^3}$, pelo que $(\boldsymbol{x\to 8})\Rightarrow(\boldsymbol{y\to 2})$. Portanto (tal como anteriormente, aplica-se a regra de Ruffini na decomposição do polinómio 'x^3-8' em fatores):

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^3-8}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)}=\frac{1}{12}$$

A vantagem obtida em efetuar a mudança de variável, está no facto de ser mais fácil calcular o limite da função racional $\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x^3-8}}$ que fazê-lo diretamente na expressão inicial.

Estratégias e Organização de Aula, Propósitos Gerais de Ensino

Todo o trabalho de observação da turma efetuado durante o primeiro período e parte do segundo foi fundamental na preparação das aulas supervisionadas. Realizei algumas intervenções pontuais, previamente preparadas com auxílio do professor cooperante. Após cada aula, trocávamos impressões e discutíamos em que medida os objetivos propostos tinham ou não sido atingidos. Permitiu-me igualmente aprofundar o conhecimento sobre a turma e cada um dos alunos individualmente, alguns dos quais já tinham sido acompanhados pelo professor cooperante no ensino básico.

Em termos de organização física da sala de aula, resolvi seguir a estratégia adotada pelo professor cooperante, nomeadamente a constituição de grupos de trabalho de dois alunos, normalmente refeitos após terminado cada subdomínio de conteúdos. A constituição de cada grupo obedecia a vários critérios, o mais relevante dos quais era a preocupação em integrar alunos com níveis diferentes de aprendizagem. Pareceu-me uma excelente opção, potenciadora de outras estratégias e metodologias como por exemplo a diferenciação pedagógica e o recurso a facilitadores e extensões. A heterogeneidade, em termos cognitivos, de cada grupo, bem como a rotatividade dos elementos integrantes ao longo do ano letivo, estimula as interações, promove a autoestima dos alunos com maiores dificuldades, favorece comportamentos de entreajuda e fortalece o espírito de coesão da turma como um todo.

A importância de planear meticulosamente qualquer aula é hoje assunto consensual e incontornável. De forma genérica, pretende-se dar resposta à necessidade que o professor tem de responder ao ‘o quê?’, ‘porquê?’ e ‘como?’, relativamente ao que se propõe transmitir aos alunos no processo de ensino-aprendizagem em que é ator da maior relevância (Abrantes, 1985).

Podemos distinguir três tipos fundamentais de planificação das ações de ensino que, embora possam conter elementos comuns, correspondem a momentos diferentes e visam responder a situações diversas (Abrantes, 1985):

- A longo prazo (plano para um ano ou um curso)
- A médio prazo (plano para uma unidade didática)
- A curto prazo (plano para uma aula)

A minha preocupação incidiu quase exclusivamente sobre o plano de cada aula. Evidentemente que consultei e analisei com detalhe o programa e metas curriculares definidos oficialmente para o 11.º ano e, com foco especial, o plano dirigido à unidade didática sobre limites, quer no que respeita a tempos quer a descritores dos objetivos a atingir em cada conteúdo.

Na elaboração de cada plano de aula, procurei endereçar os pontos considerados essenciais pela generalidade dos autores: tópico central, objetivos, conteúdos, estratégias, materiais/recursos e avaliação (Abrantes, 1985).

Se a planificação é muito importante, não convém confundir planear com executar. Um professor pode organizar um razoável e pormenorizado plano de aula, mas executá-lo de maneira deficiente. E o contrário também pode suceder (Abrantes, 1985). Aqui foi muito importante o apoio crítico do professor cooperante, contribuindo para que o plano de aula não se convertesse, na prática, num esquema de aula rígido "que embaraça o professor e limita a iniciativa dos alunos" (Abrantes, 1985). Pelo contrário, deve procurar-se conciliar cada plano de aula com os planos já referidos a outros níveis, nomeadamente o "plano da unidade didática e ter sempre presentes os grandes temas e os objetivos essenciais quer da unidade quer do curso" (Abrantes, 1985). Trata-se de uma perspetiva mais exigente e abrangente, requerendo maior esforço de preparação e reflexão por parte do professor, o que nem sempre sucede, especialmente com os professores mais novos e por isso mais inexperientes, com tendência a agarrarem-se ao plano de forma rígida e não aproveitar acontecimentos imprevistos que possam valorizar uma aula.

Definidos os objetivos de aprendizagem para cada aula, segue-se a seleção das tarefas que consideramos úteis à sua prossecução. Aspetos como segmentação da tarefa, duração esperada para cada segmento, atividade prevista dos alunos e possíveis dificuldades, resposta do professor a questões presumíveis colocadas pelos alunos, objetivos e avaliação, são algumas das dimensões a considerar no planeamento cuidado das tarefas selecionadas (Ponte, Quaresma & Pereira, 2015).

De acordo com o NCTM (2000), um dos seis princípios fundamentais para o ensino-aprendizagem da Matemática ('Teaching Principle') exige que o professor, para ser eficiente e efetivo na sua atividade, entenda aquilo que os estudantes sabem e necessitam saber, colocando-lhes desafios e dando-lhes todo o apoio necessário para que tenham sucesso na aprendizagem. Ora os alunos aprendem Matemática através das experiências que os professores lhes proporcionam. É um trabalho complexo, não existem receitas fáceis, nem para professores nem para os estudantes. Mas uma importante responsabilidade do professor é precisamente selecionar tarefas matemáticas proveitosas para os alunos (NCTM, 2000).

A mesma ênfase na relevância e diversidade das tarefas na aprendizagem da Matemática é assinalada por Stein e Smith (2009):

> O nosso foco nas tarefas matemáticas baseia-se na ideia que as tarefas usadas na sala de aula constituem a base para a aprendizagem dos alunos. Tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem que os alunos pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem. O efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas, conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática – sobre se a Matemática é algo que eles podem pessoalmente compreender o sentido e quão longa e arduamente devem trabalhar para o conseguir (p.22).

Uma interessante exposição sobre a evolução da opinião, no século XX, acerca do papel e natureza da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, pode encontrar-se em Schoenfeld, (1996). O autor chama a atenção para que as atividades *com sentido matemático* são as que estimulam nos alunos comportamentos como modelar e simbolizar, analisar, explorar, conjeturar e provar. Fazer sentido deveria ser a principal atividade da escola, na Matemática como em todas as outras disciplinas. A escola deve ser um lugar em que o aluno aprende a pensar.

As aulas foram planeadas e organizadas procurando aplicar um quadro de referência para a prática de ensino exploratório da Matemática:

> O quadro adota um modelo de quatro fases para a estrutura da aula: 1) Introdução da tarefa; 2) Desenvolvimento da tarefa; 3) Discussão da tarefa, e 4) Sistematização das aprendizagens matemáticas. (…) Isso exige do professor uma abordagem exploratória do ensino, centrada no trabalho dos alunos (…). O professor precisa de criar um ambiente de aprendizagem que acolha todos os alunos, de gerir as suas participações e interações de modo a que se relacionem produtivamente com o conteúdo matemático e as suas representações, (…) (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012, pp.255-257)

É também interessante notar qual o papel do professor em cada fase da exploração de uma tarefa:

> Na fase de lançamento, a intervenção dominante é da professora e o seu foco recai essencialmente na gestão da sala de aula. Na fase de desenvolvimento, as intervenções com foco no processo e na concetualização remetem principalmente para a

> justificação/explicação e as intervenções focadas no produto tendem a estar associadas ao resolver. Por último, na fase de discussão, a professora reassume um papel mais interventivo na interação com os alunos. (Santos & Pinto, 2018, p.12)

Procurei selecionar tarefas que fossem adaptadas aos principais objetivos da unidade de ensino incluídos nas seis aulas que constituíram a minha lecionação supervisionada. Tomei igualmente como elementos de ponderação, tanto a observação que efetuei de cada um dos alunos da turma durante o primeiro e parte do segundo período letivo, como as estratégias de ensino que eram habitualmente praticadas pelo professor cooperante e a que os alunos estavam habituados.

Quanto à organização da atividade dos alunos em sala de aula, segui exatamente a praticada pelo professor cooperante, não só por me parecer eficaz e adequada às características da turma, como também por constatar que era bem aceite pelos alunos. Assim, os alunos trabalharam sempre aos pares, em grupos heterogéneos e dispostos em sala de forma pré-definida. De um modo geral, e desde que não houvesse perturbação para o resto da turma, os diferentes grupos podiam trocar impressões entre si. Periodicamente, normalmente quando se mudava de domínio de conteúdos, os grupos eram refeitos e a sua disposição alterada, havendo a preocupação de diversificar interações mantendo o princípio da diferenciação de níveis de aprendizagem dentro de cada grupo. Houve no entanto o cuidado de não alterar os grupos na transição do estudo dos limites de sucessões para os limites de funções, o que fez sentido dado o papel das sucessões na definição de Heine.

Ainda no que respeita à prática letiva em aula, procurei respeitar e seguir o quadro de referência de ações intencionais subjacentes a um estilo de ensino de tipo exploratório (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013), procurando identificar e endereçar adequadamente as dificuldades de apreensão do conceito de limite pelos alunos. Para tal planeei e propus aos alunos algumas tarefas e problemas que lhes facultassem uma abordagem gradual e progressiva ao conceito de limite, de um modo primeiro intuitivo e informal, evoluindo depois para a definição formal e precisa da linguagem matemática. As tarefas e exercícios propostos aos alunos para análise exploratória autónoma foram por isso criteriosamente escolhidos, procurando evitar o reforço de possíveis preconceitos e conflitos cognitivos impeditivos da correta perceção e interiorização dos aspetos mais formais e intrínsecos do conceito. Pelo contrário, algum facilitismo ou fuga a expor os alunos à complexidade do conceito, pode ter implicações negativas nas aprendizagens às disciplinas de Análise e Cálculo no ensino superior (Tall & Vinner, 1981).

Dada a minha inexperiência, o número limitado de aulas lecionadas e a extensão do programa de Matemática no ensino secundário, certamente que não consegui aplicar todas as boas práticas referidas na seleção das tarefas com que resolvi confrontar os alunos. Apesar disso, e tomando a classificação de tarefas apresentada por (Ponte, 2005) e detalhada no Capítulo 2 deste estudo (ver Figura 2-3), considero que toda a Ficha de Trabalho nº 1 (Anexo 1) tem um cariz eminentemente exploratório, servindo de antecâmara à definição formal de limite segundo Heine. O mesmo sucede com a tarefa 3 da Ficha de Trabalho nº 6 (Anexo 6), embora aqui o nível de desafio seja claramente mais elevado, o que a aproxima de uma tarefa de tipo investigativo, ainda que muito facilitada pelas sugestões e comentários que acompanham a apresentação da tarefa.

As Fichas de Trabalho nº 2, 3 e 4 (esta até à questão 3, inclusive) (Anexos 2, 3 e 4, respetivamente), apresentam tarefas que oscilam entre exercícios e problemas, conforme o menor ou maior nível de desafio colocado ao aluno. A complexidade aumenta sempre que se exige a aplicação da definição de Heine ou quando o enunciado é puramente algébrico, isto é, sem apoio gráfico (caso do problema 3 do miniteste de avaliação). Um bom exemplo de tarefa/problema que apresenta um pequeno salto qualitativo relativamente aos demais com a mesma tipologia, é a questão 1 da Ficha de Trabalho nº 6 (Anexo 6). Exige que o aluno relacione e integre o conceito de limite (e operações com limites) com conhecimentos anteriores sobre funções quadráticas.

Ao contrário, o final da Ficha de Trabalho nº 4, toda a Ficha nº 5 (Anexo 5) e a questão 2 da Ficha de Trabalho nº 6, são claramente tarefas do tipo exercício, destinadas a agilizar os alunos na operatória sobre limites, em especial nas técnicas de levantamento de indeterminações. Exige-se que os alunos assimilem e pratiquem os procedimentos que permitem abordar o cálculo de limites de diferentes tipos de expressões algébricas. Estamos pois aqui no domínio de aprendizagens menos sofisticadas, que não "…vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos…" (Canavarro, 2011, p.16). Para maior detalhe, ver planificação realizada das seis aulas lecionadas nos Anexos 1 a 6 deste relatório.

Cada aula foi cuidadosamente preparada e planeada, sendo elaborado um documento pormenorizado com os diversos momentos de lecionação, previamente discutido e revisto com a colaboração ativa do professor orientador. Na planificação consideraram-se não apenas os objetivos gerais expressos no planeamento anual da disciplina definidos pela escola, como concretamente as características específicas da unidade didática em que se insere o conceito de limite de uma função e sua operacionalização.

Para cada aula foi elaborada uma Ficha de Trabalho onde estavam descritas as tarefas e exercícios a propor aos alunos. Os alunos trabalharam sempre em grupos de dois elementos (ou três, nas aulas em que o número total de alunos fosse ímpar). As tarefas propostas aos alunos foram todas extraídas, com exceção da seção 3. da ficha de trabalho nº 6, do manual adotado pela escola. Os problemas e exercícios originais foram por vezes adaptados ou modificados, para melhor se adequarem ao perfil e níveis de aprendizagem dos alunos da turma. Este trabalho foi efetuado em estreita colaboração com o professor cooperante, tendo a versão final de cada tarefa resultado de discussão e consideração de diversas possíveis abordagens alternativas.

Tentei, na elaboração de cada tarefa, envolver os princípios enunciados pelo NCTM: 'equity', 'curriculum', 'teaching', 'learning', 'assessment' e 'technology'. Já no que respeita aos 'standards', dadas as características do tema limites, a ênfase recai nos designados 'Process Standards', nomeadamente 'problem solving', 'reasoning and proof' e 'representation' (NCTM, 2000). Em termos de pressupostos, exigir-se-ia que os alunos possuissem conhecimentos razoavelmente consolidados em Álgebra e Geometria, o que sabemos não suceder em muitos casos.

Em termos de equidade ('equity principle', no sentido dado pelo NCTM de proporcionar e garantir altas expectativas e apoio adequado para todos os estudantes, independentemente das suas características pessoais, experiência ou nível de conhecimento atingido, isto é, criar condições para que todos os alunos tenham iguais oportunidades), teria sido desejável ter ido mais longe. Tratando-se de um número muito reduzido de aulas e atendendo ao currículo muito exigente do ensino secundário, em termos de extensão e tempo de execução, não foi possível, na seleção das tarefas, aplicar as técnicas de recurso a facilitadores ('enabling prompts') e extensões ('extension prompts'), destinados precisamente a maximizar as oportunidades de aprendizagem de todos os alunos da turma (Sullivan et al, 2006). Não obstante, sempre que possível e apropriado, empreguei estas práticas durante o meu trabalho de apoio e acompanhamento da turma em sala de aula, bem como processos de diferenciação pedagógica (Tomlinson et al., 2003) direcionados às necessidades específicas de cada aluno.

Foi pena não ter tido oportunidade de confrontar a turma com uma tarefa que envolvesse o conceito de limite na resolução de um problema ou situação em contexto da vida real. Teria sido interessante como ilustração da utilidade do conceito também em questões práticas, por exemplo no domínio da computação ou da engenharia. Apresentei à turma, em introdução ao tema limite de sucessões, uma tarefa exploratória em que se procurava desmontar, de uma forma simplificada, um dos mais conhecidos paradoxos de Zenão: Paradoxo da Dicotomia. Foi uma atividade interessante, apreciada pelos alunos, mas muito exigente em termos de tempo, pelo que receei confrontar a turma com um desafio semelhante para o limite de funções.

Convém também salientar que existem relativamente poucas tarefas com as características indicadas, adaptadas a alunos do ensino secundário recém-confrontados com o conceito de limite. Pelo menos em Língua Portuguesa e ajustadas à realidade do nosso ensino e currículo. Na maioria dos casos, destinam-se a alunos pré-universitários (12.º ano) ou frequentando o primeiro ano da universidade. Também é escassa a informação sobre resultados práticos da investigação nesta área, o que aumenta o risco de insucesso, quer na preparação e planificação da tarefa, quer nas ações concretas de recurso de que nos podemos socorrer no caso de dificuldades ou reações inesperadas por parte dos estudantes.

Apesar das limitações referidas, julgo ter conseguido, na globalidade das tarefas selecionadas, construir um conjunto coerente que permitisse aos alunos atingir os objetivos que constam do programa para as seis aulas lecionadas: apreensão do conceito de limite segundo Heine e sua aplicação ao cálculo de limites de diferentes expressões algébricas. Espero que as atividades escolhidas tenham valido não tanto pela sua mera execução (com ou sem erros), mas principalmente pelas reflexões que suscitaram nos alunos:

> O problema da selecção e articulação das tarefas não se esgota, no entanto, na diversificação. É preciso que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática. É preciso fazer escolhas, estabelecer um percurso balizado por tarefas que permitam trabalhar de modo natural os diversos aspectos de conteúdos e de processos visados pelo professor. (Ponte, 2005, p.18).

Avaliação das Aprendizagens

A avaliação das aprendizagens é, de acordo com o NCTM (2000), o foco de um dos seis princípios fundamentais que o ensino da matemática deve endereçar. A avaliação deve suportar a aprendizagem das diversas temáticas e disponibilizar informação relevante, quer aos professores quer aos estudantes. Tem por objetivo promover a aprendizagem, devendo pautar-se por regras que garantam equidade, transparência e coerência dos processos envolvidos na sua concretização.

Ao contrário do que sucedeu durante a maior parte do século XX, a avaliação não tem por único objetivo produzir uma medida. Esta visão redutora e limitada é ainda hoje frequente, quando se associa a avaliação, em contexto escolar, a uma nota/classificação ou à realização de testes e exames. Esta perspetiva isola também a avaliação do currículo, concebendo-a como uma técnica neutra. Pelo contrário, a avaliação tanto serve para monitorizar o processo de ensino-aprendizagem, como para medir os resultados de um currículo em termos de aprendizagem (Santos & Pinto, 2018).

Mas se não é uma medida, então o que será? A avaliação, no âmbito educacional, é um processo de vai e vem de seleção e produção de informação, de evidências, entre o trabalho do estudante em resposta a um pedido e o modelo de referência do professor. Dado o processo avaliativo envolver uma tomada de decisão, é essencial ter em conta que esta resulta de uma comparação entre o produzido e o esperado, pelo que é indispensável a apropriação, por parte dos diversos intervenientes, dos critérios de avaliação (Santos & Pinto, 2018). A comunicação, seja no binómio professor/aluno, seja entre alunos no seio da própria turma, assume um papel primordial, devendo existir alinhamento de objetivos entre ensino e avaliação.

> A avaliação é um processo de comunicação, no qual os avaliadores – sejam eles próprios alunos, os professores ou outros – aprendem algo sobre o que os alunos sabem e são capazes de fazer, e no qual os alunos aprendem algo sobre o que os avaliadores valorizam. Quando a incidência e a forma de avaliação são diferentes das do ensino, essa avaliação subverte a aprendizagem dos alunos porque lhes transmite mensagens contraditórias acerca da Matemática que é valorizada. Quando o ensino se orienta segundo um conjunto de objectivos e a avaliação – sobretudo se se destina a fins importantes – se rege por outros, os alunos confrontam-se com um dilema e assumem que os objectivos importantes são os da avaliação (NCTM, 1999, p.15).

Existem fundamentalmente dois tipos distintos de avaliação de aprendizagens, adotados conforme o contexto e a finalidade que se pretenda atingir: a avaliação formativa e a avaliação sumativa.

A avaliação formativa, ou avaliação para as aprendizagens, embora seja uma designação abrangente, pois cobre um leque variado de práticas, usa as evidências para perceber onde o aluno está em termos de aprendizagem, para tomar decisões no sentido de providenciar mais e melhores aprendizagens e para regular o ensino (Santos & Pinto, 2018). Este tipo de avaliação pode ser da responsabilidade do professor, do aluno ou haver uma responsabilidade partilhada entre ambos. Ocorre tipicamente a par com o processo de ensino e aprendizagem, utilizando muitas vezes processos informais adaptados a cada aluno. Foca-se tanto sobre os resultados como sobre os processos. Por se tratar de um importante elemento regulador do ensino e da aprendizagem, a avaliação formativa é também por vezes designada de avaliação reguladora.

A avaliação sumativa, por vezes designada de avaliação das aprendizagens, consiste num processo "no qual as evidências são usadas para inventariar as aquisições dos estudantes num certo momento da sua aprendizagem (reportar, informar, …) e tomar decisões em conformidade com o estabelecido administrativamente (hierarquizar, selecionar, …)." (Santos & Pinto, 2018, p.6). A sua realização é da responsabilidade do professor, ocorre normalmente no final de um período de aprendizagem e está frequentemente associada a objetivos de certificação. Ao invés da avaliação formativa, recorre sempre a processos formais, como por exemplo testes e exames, aplicados a um conjunto de alunos.

Há autores que consideram uma terceira modalidade de avaliação, realizada preferencialmente no início de um processo de aprendizagem, cujo objeto é a obtenção de informações sobre os conhecimentos, aptidões e competências dos estudantes, com vista à organização de processos e estratégias de ensino e aprendizagem mais adequados face às situações identificadas (diagnóstico) e aos objetivos que se pretendem atingir. Daí ser apelidada de avaliação diagnóstica. Tem um cariz preventivo, acautelando a deteção tardia de dificuldades manifestadas pelos alunos. Parece no entanto mais simples e apropriado enquadrá-la no universo da avaliação formativa, já que persegue os mesmos propósitos e finalidades desta. Adicionalmente, toda a avaliação formativa é também de diagnóstico, na medida em que procura identificar, perceber e superar as lacunas responsáveis pela desfasagem entre o ponto em que o aluno se encontra e o nível de aprendizagem que era expectável já ter atingido (Santos & Pinto, 2018).

A avaliação deve ser uma ferramenta ao serviço das aprendizagens, estar bem integrada com o currículo, assumir um pendor essencialmente formativo e ocorrer de forma sistemática, intencional e contínua (Dias & Santos, 2009).

> Mas esta diferença entre uma avaliação orientada para classificar e uma avaliação orientada para melhorar, exige mudanças culturais profundas, requer que suscitemos a reflexão informada dos professores, das famílias, dos investigadores, dos gestores escolares e dos responsáveis pela condução das políticas educativas. (Fernandes, 2005, p.3)

O papel do professor é mais uma vez fundamental, mas a avaliação formativa é também muito exigente para os alunos. A avaliação formativa pressupõe uma partilha de responsabilidades entre alunos e professores. Os professores terão um papel preponderante em aspetos tais como a identificação dos principais domínios do currículo, a seleção de tarefas a propor aos alunos e a organização e distribuição de *feedback* qualificado, enquanto a primazia dos alunos assentará no desenvolvimento dos processos que se referem à autoavaliação e à autorregulação das suas aprendizagens (Fernandes, 2009). A avaliação, como instrumento de melhoria permanente das aprendizagens, é transversal a toda a atividade letiva, emergindo nos mais variados episódios educativos, nem sempre previstos pelo avaliador.

> Algumas avaliações podem destinar-se a determinar como os alunos usam, numa situação não habitual, aquilo que aprenderam previamente. Outras podem requerer que os alunos aprendam uma estratégia ou conceito matemático novo durante a avaliação e usem esse conhecimento para resolver problemas. Os avaliadores devem também reconhecer que as ideias matemáticas que surgem numa actividade de avaliação nem sempre são as inicialmente previstas. (NCTM, 1999, p.13)

> Ao planificar as aulas e ao tomar decisões sobre o ensino, os professores identificam oportunidades para uma variedade de avaliações. (…). A preparação de uma avaliação formal não significa interromper o ensino normal e ensinar para o teste. (NCTM, 1999, p.15)

> À medida que ocorre a mudança da aula centrada no professor para a aula centrada nos alunos, estes tornam-se participantes mais activos na avaliação. Nestas aulas, os alunos aprendem a reflectir sobre o seu trabalho e a sua aprendizagem, a fazer auto-reflexão crítica, a criticar o trabalho dos seus colegas e a usar construtivamente as críticas dos outros. (NCTM, 1999, p.16)

A avaliação é um processo onde se recolhe evidência e se estabelecem inferências a partir dessa evidência, com várias finalidades. Uma inferência sobre a aprendizagem é uma conclusão acerca dos processos cognitivos dos alunos, os quais não podem ser diretamente observados. Esta tem de se basear no desempenho do aluno. Em Matemática, as potenciais fontes de desempenho disponíveis são múltiplas, como por exemplo observações, entrevistas, tarefas abertas, situações problemáticas, portefólios ou os tradicionais testes, também de tipologia variada (escolha múltipla, associação, ordenação, verdadeiro/falso, completamento, resposta curta, desenvolvimento, etc) (NCTM, 1999).

Nas aulas lecionadas privilegiei a avaliação formativa, tendo havido apenas um episódio pontual de formação sumativa, aquando da realização do miniteste no final da sexta aula. Como os alunos estavam organizados em grupos de trabalho, a avaliação sumativa efetuada não permitiu obter resultados a nível individual.

Dada a minha inexperiência e o número limitado de aulas envolvidas, não foi evidentemente possível aplicar e testar a maioria das características, técnicas e processos de avaliação formativa acima descritos de forma muito sucinta. Além disso, a maior parte da avaliação realizada teve um carácter informal, baseando-se na observação do desempenho individual e coletivo da turma desde o início do ano letivo. Esse acompanhamento regular, complementado com o conselho, conhecimento e apoio permanente do professor cooperante, permitiu-me atingir uma perceção razoável do nível de desempenho individual dos alunos da turma e o seu comportamento em dinâmicas e contexto de grupo. Ou seja, até iniciar o conjunto de aulas supervisionadas objeto deste relatório, foi possível realizar uma avaliação diagnóstica razoável das competências dos alunos da turma e das suas principais lacunas e dificuldades a Matemática. Estes sinais que fui recolhendo no dia-a-dia da turma na disciplina, combinados com apreciações críticas efetuadas com o professor cooperante no final de cada aula, foram as contribuições mais relevantes para o trabalho prático de planificação de cada aula, em especial no que concerne à seleção das tarefas e desafios com que iria confrontar os alunos.

Durante as seis aulas supervisionadas, procurei acompanhar sempre de perto as produções dos alunos, quer individualmente, quer estimulando a troca de impressões e pontos de vista no seio de cada grupo de trabalho. Retirei notas, efetuei a audição cuidada das gravações da atividade dos alunos, analisei os seus registos escritos, sempre com o objetivo de adequar cada aula às necessidades da turma e procurando dar resposta à disparidade de níveis de aprendizagem revelada por alguns alunos. Dada a importância do *feedback* (especialmente o de cariz essencialmente descritivo, seja oral ou escrito) na regulação e progressão das aprendizagens (NCTM, 1999; Fernandes, 2006; Santos, 2008; Dias & Santos, 2009), preocupei-me em manter com os alunos e grupos de trabalho uma interação permanente durante as diferentes etapas do trabalho autónomo associado à resolução das tarefas com que foram confrontados. Tentei que as minhas intervenções e comentários ao trabalho desenvolvido pelos alunos contribuíssem para estimular o seu espírito crítico e reflexão sobre a temática em consideração, de modo a que, sempre que possível, superassem de forma autónoma os obstáculos que iam encontrando.

Aulas Lecionadas

O presente estudo envolve seis aulas assistidas, com início a 11 de março e conclusão a 25 de março, no ano de 2019. Todas as aulas tiveram a duração de dois tempos de 45 minutos cada, totalizando 90 minutos por sessão, sem qualquer interrupção ou intervalo. Os dias da semana foram segunda, terça e quinta-feira, de manhã, entre as 10 e as 13 horas.

Apesar de compreender seis aulas, o período abrangido pela lecionação foi ligeiramente superior ao previsto, devido à ocorrência de uma greve de professores (nos dias 20, 21 e 22 de março). Para além da normal e inevitável agitação e perturbação causada pela interrupção das aulas, na escola e especialmente nos alunos, o principal efeito negativo foi ter ocorrido uma aula extra numa sala que dispunha de apenas um quadro (aula de segunda-feira). Dada a relevância e frequência dos momentos de aula em que os alunos apresentam e discutem a resolução das tarefas e exercícios propostos, é significativo o impacto, em termos de eficiência e ritmos de trabalho, de dispor de um ou dois quadros em sala de aula.

Em termos de pontualidade, em geral todos os alunos estavam presentes no início de cada aula. O facto de não se tratar da primeira aula do dia ajudou, os alunos mostravam-se bastante ativos, disponíveis e despertos no início de cada sessão. No entanto, em duas aulas alguns alunos chegaram mais tarde devido à sua participação em atividades escolares. A maioria dos alunos da turma esteve presente na totalidade das seis aulas lecionadas.

Em regra, cada aula iniciou-se com uma síntese dos temas abordados na aula anterior e, se fosse caso disso, as respetivas conclusões. Houve sempre a preocupação de transmitir à turma a continuidade e ligação entre aulas consecutivas, procurando assim evidenciar que a matemática é uma disciplina em que os temas abordados não são estanques e independentes entre si.

A estratégia subjacente às seis aulas consistia em dedicar cerca de metade do tempo, ou seja, três aulas, à introdução, apresentação e consolidação do conceito de limite de uma função, aproveitando as restantes para a operatória sobre limites, incluindo os principais teoremas que a suportam e as técnicas de levantamento de indeterminações. Como se verá na descrição sumária de cada aula, tal não foi alcançado, não tendo sido sequer possível iniciar os exercícios sobre álgebra de limites.

Ao cabo da primeira aula ficou claro que muito dificilmente seria possível completar as seis fichas de trabalho, tal como tinham sido inicialmente planeadas tentando cumprir os tempos letivos previstos no planeamento anual da disciplina publicado pela escola (AEQB-ESPAN, Planificação Anual 11.º ano - Matemática A - 2018/2019). O plano efetuado pela escola previa 10 tempos para os conteúdos agendados nas seis aulas supervisionadas, ou seja, a minha programação beneficiava de cerca de 2 tempos (um pouco menos, uma vez que a sexta aula incluía um curto teste de avaliação) relativamente ao que foi recomendado pela escola.

No final da terceira aula percebi que tinha de fazer uma opção angustiante: prosseguir com os exercícios que tinha delineado serem adequados a uma correta apreensão do conceito de limite (de uma função) pelos alunos ou, ao contrário, ‘saltar’ alguns deles e retomar o plano inicial, arrancando com a álgebra de limites na ficha de trabalho nº 4, seguindo com os exercícios de consolidação nas duas fichas seguintes. O facto de sentir que a maioria da turma parecia ainda não ter ‘agarrado’ a noção de limite e a importância do conceito para os temas subsequentes (continuidade, assintotas e derivadas), levou-me a decidir pelo cumprimento dos exercícios que tinha previsto para a exploração da definição de limite segundo Heine. Tenho dúvidas se foi a melhor decisão, ainda que a álgebra de limites seja tradicionalmente a área desta temática em que os alunos são bastante mais proficientes.

Em termos de planeamento e organização do trabalho em sala de aula, seguiu-se o mesmo padrão em todas as seis aulas supervisionadas, destacando-se cinco momentos fundamentais, a saber: breve recordatória do ponto em que terminou a aula anterior; enquadramento e apresentação da tarefa a realizar pelos grupos de trabalho; espaço para trabalho autónomo a realizar pelos alunos com apoio e acompanhamento do professor; exposição no quadro e discussão coletiva de resoluções previamente selecionadas, finalizando cada discussão com uma síntese e sistematização dos resultados alcançados.

Sempre que possível, reservou-se também um espaço no final de cada aula para o resumo dos conteúdos e conclusões obtidas no decurso da sessão.

Nem sempre foi possível trazer à discussão da turma as resoluções que selecionara durante o apoio ao trabalho autónomo desenvolvido pelos alunos. Alguns alunos com pior desempenho mostravam-se frequentemente relutantes em ir ao quadro, não os conseguindo persuadir de que isso seria vantajoso para eles e para todos os colegas. Como os grupos de trabalho eram heterogéneos, por regra o aluno mais competente era também o mais colaborante. Apesar disso, tentei sempre que as discussões abordassem o maior número de obstáculos que observara no apoio aos grupos de trabalho, sem menosprezar os mais básicos, isto é, endereçando competências que deveriam ter ficado bem consolidadas no final do ensino básico.

Aula 1 (11 de março de 2019, 11:45 às 13:15)

Esta aula iniciou-se com uma rápida retrospetiva dos assuntos tratados no domínio anterior, limites de sucessões, informando de seguida os alunos de que a matéria que se iria seguir abordaria o mesmo conceito, aplicado a funções reais de variável real. Salientou-se que a definição de limite de funções iria fazer uso direto daquilo que tinham aprendido a respeito do limite de sucessões.

A Ficha de Trabalho nº 1 (ver Anexo 1) foi elaborada com o objetivo de preencher esta aula embora admitisse, dadas as características da turma, que apenas pudesse ser completada na aula seguinte. E assim acabou por suceder, apesar de o tempo total despendido com a ficha ter excedido em muito o que seria razoável para alunos do 11.º ano.

A ficha executada em aula consistiu essencialmente na tarefa proposta aos alunos na página 11 do volume 3 do manual adotado (Viegas & Valente, 2016). A sequência de execução do exercício foi alterada, procurando-se que o aluno explorasse completamente cada sucessão antes de passar à seguinte. Penso ter sido uma abordagem mais proveitosa do ponto de vista didático, ainda que, aparentemente, alguns alunos não tenham entendido que o processo utilizado na exploração com a primeira sucessão se repetia, sem alteração, para as duas sucessões seguintes.

O objetivo a atingir na aula era preparar a turma para a definição de limite segundo Heine. Nesse sentido, a tarefa proposta não apresentava qualquer dificuldade significativa para alunos do 11.º ano, tanto no que respeita às sucessões como às funções propostas. A intenção era que o aluno se concentrasse no processo de convergência de uma sucessão, assunto já estudado no subdomínio anterior, e o transpusesse de forma perfeitamente análoga para a sucessão imagem por intermédio da função. Esta prática serviria assim para exemplificar à turma, de uma forma direta, a sequência de raciocínio e conclusão presentes na definição de limite de uma função segundo Heine. Ou seja, procurar chegar naturalmente ao limite de uma função a partir do que já fora apreendido sobre limite de uma sucessão.

A ficha apresentava ainda outra vantagem. Permitia abordar o conceito de limite de uma forma multidimensional: gráfica, numérica, algébrica e até computacional, uma vez que era permitido e incentivado que os alunos modelassem as sucessões e funções na calculadora gráfica. Uma vez que a abordagem ao conceito de limite varia frequentemente de aluno para aluno de acordo com as suas experiências e preferências anteriores, esta diversidade de perspetivas poderia ter o efeito didático de responder à diferenciação pedagógica exigida pelas características da turma.

O efeito pretendido não foi plenamente atingido. Alguns alunos começaram por ter dificuldades em perceber o que era pretendido com a tarefa, apesar de a mesma não conter nada de novo relativamente a exercícios semelhantes executados durante o estudo das sucessões. Ademais, quando iniciaram a resolução, logo surgiram dificuldades relacionadas com o preenchimento correto das tabelas, o cálculo dos valores transformados pela função e a identificação da própria sucessão imagem. Ou seja, emergiram défices cognitivos que depressa determinaram que o principal objetivo da tarefa ficasse comprometido ou passasse para segundo plano. É por exemplo curioso que um número significativo de alunos não se tenha apercebido, pelo menos de imediato, que os valores da sucessão (alternada) $(\boldsymbol{w_n})$ poderiam ser obtidos diretamente a partir dos cálculos já realizados para as sucessões $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$.

Apesar do apoio permanente que procurei dar aos grupos de trabalho, não foi possível iniciar nesta aula a resolução do exercício 3., ou seja, a aula esgotou-se no estudo do comportamento da primeira função (a função $'\boldsymbol{f}'$). Não ficou para mim claro que todos os alunos tenham percebido o racional da tarefa, isto é, o efeito de diversas sucessões objeto (com o mesmo limite) no limite das respetivas sucessões imagem (pela função). As limitações demonstradas por alguns alunos no domínio do próprio conceito de função, tornou difícil perceber a passagem da sucessão objeto à sua imagem, seja em termos gráficos, seja principalmente no plano algébrico.

Considero que a aula decorreu de forma satisfatória em termos da participação e entrega dos alunos, ainda que tenha logo sentido termos ficado bastante aquém dos objetivos que me tinha proposto alcançar. Entretanto, fiquei com a esperança de que o prolongamento da discussão e esclarecimento de dúvidas nos exercícios 1. e 2., viessem a ter impacto positivo no tempo de conclusão do resto da ficha de trabalho.

A aula terminou com uma síntese das conclusões obtidas e a informação de que prosseguiríamos a resolução da ficha de trabalho na aula do dia seguinte.

Aula 2 (12 de março de 2017, 10:05 às 11:35)

A aula iniciou-se no ponto em que tinha concluído a aula anterior, ou seja, no exercício 3 da ficha de trabalho nº 1, tendo confirmado que alguns grupos ainda não o tinham terminado. Concedi à turma cerca de 10 minutos para a sua conclusão, pedindo aos restantes grupos que se ocupassem com o exercício 4, último da ficha.

A discussão do exercício 3 decorreu a um ritmo superior ao que tinha sucedido com o exercício 1, ainda que alguns alunos tenham evidenciado dificuldade em trabalhar com a função $\boldsymbol{g}$, pelo facto de ser definida por dois ramos distintos, separados precisamente no ponto de convergência das sucessões (ponto de abcissa 2). As principais diferenças relativamente ao exercício 1 consistiam em a imagem da sucessão $(\boldsymbol{w_n})$ não ser convergente e as sucessões $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_n}))$ e $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v_n}))$ convergirem para valores diferentes. A divergência de $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w_n}))$ gerou maior controvérsia na discussão, pareceu-me contudo que os alunos entenderam as conclusões alcançadas durante a apresentação da resolução no quadro.

A ficha 1 terminou com a resolução no quadro, seguida de discussão, do exercício 4. Este exercício foi concebido para efetuar a transição entre as tarefas anteriores e a introdução da definição de Heine no início da ficha de trabalho nº 2. Pedia-se aos alunos que comentassem duas afirmações. Quase todos os grupos tiveram muita dificuldade em fazê-lo, não justificando a sua decisão sobre a verdade ou falsidade de cada proposição. Já tinha confirmado que nenhum grupo tinha redigido uma resposta clara ao exercício. Selecionei uma equipa para apresentar a sua resolução no quadro, mas não fiquei convencido de que todos os grupos tenham sido plenamente esclarecidos com a discussão que se seguiu, de que fui moderador. Os alunos mostram dificuldade em lidar com quantificadores (‘qualquer que seja…’, ‘existe um, pelo menos…’), mesmo usando expressões da linguagem corrente. Também a formulação das questões em termos de uma implicação matemática parece não ter sido bem percecionada por alguns grupos de trabalho.

Um tanto apreensivo com a reação de alguns alunos ao exercício 4, apresentei à turma a definição de limite de uma função segundo Heine, ilustrando-a precisamente com os exemplos já trabalhados na ficha de trabalho acabada de concluir. A resposta dos alunos pareceu-me positiva, o que aumentou o meu otimismo para as tarefas que se seguiriam.

Recolhidas as folhas com as resoluções da ficha de trabalho nº 1, distribuí à turma a Ficha de Trabalho nº 2 (ver Anexo 2). Faltavam cerca de 20 minutos para o final da aula. Informei os alunos de que deviam iniciar imediatamente a resolução da nova ficha, começando por ler com atenção a sua introdução, onde constava a definição de Heine acabada de apresentar, bem como um gráfico ilustrativo da mesma. Recorri, mais uma vez, a recursos disponibilizados no manual adotado pela escola.

A aula terminou com a discussão do exercício 1 da ficha de trabalho nº 2. De novo ficou patente a extrema dificuldade de alguns alunos em justificarem as suas respostas, mesmo apelando ao uso de linguagem comum. Julgo no entanto que foi possível fazer a ligação entre este exercício, a definição de Heine e as tarefas executadas na ficha de trabalho anterior.

Continuou assim a agravar-se a disparidade entre o plano para seis aulas que tinha idealizado, em concordância conservadora com o planeamento anual da escola para a disciplina (onde estavam reservados 10 tempos para o limite de funções), e a realidade do ritmo de aprendizagem evidenciado pela turma. Apesar disso, mantinha a esperança de efetuar alguma recuperação, ainda que parcial, do programa que tinha delineado.

Aula 3 (14 de março de 2019, 10:05 às 11:35)

Nesta aula retomou-se a Ficha de Trabalho nº 2. Os grupos mais atrasados iniciaram a resolução do exercício 2. Este exercício é muito semelhante ao exercício 1 concluído na aula anterior. A diferença fundamental consiste em questionar sobre a existência de limite, em vez de admitir que o mesmo existe. Por isso, a aula iniciou-se com uma rápida recordatória do que tinha sido concluído no final da aula 2. Uma vez que tinha notado dificuldade da turma em entender a relação da resolução da questão 1 com a definição de Heine, resolvi dedicar algum tempo explorando aquela definição numa perspetiva gráfica, esperando que isso contribuísse para uma melhor abordagem ao exercício 2 e seguintes, já que todos eles apelavam a justificações só possíveis através de uma boa compreensão da definição de limite.

Não tive grande êxito. Poucos grupos conseguiram justificar a sua decisão, quer na questão 2, quer no exercício 3, apesar do enunciado de ambos explicitar que apenas uma escolha seria acertada e do exercício 3 ser muito semelhante ao exercício 1, com a vantagem da função estar representada graficamente e a dificuldade de apresentar dois ramos.

No final, ao refletir sobre o decurso da aula, concluí que talvez tenha cometido um erro na sequenciação dos três primeiros exercícios da ficha de trabalho nº 2, embora os tenha apresentado pela ordem em que surgem no manual de estudo adotado. Como os alunos revelam tradicionalmente algum incómodo perante desafios de maior grau de abstração, foi má ideia iniciar a ficha com tarefas em que a função interveniente não estava concretizada. Teria sido preferível iniciar a ficha com o exercício 3.

Apesar do seu cariz mais abstrato, foi no entanto o problema 2.b) (ver Anexo 2) que suscitou o momento mais estimulante durante a discussão que se seguiu à apresentação da solução no quadro. Um aluno hesitou entre a resposta (A) e (D), acabando por se decidir pela incorreta, a (D), pelo facto de considerar que, dados os exemplos bilaterais (relativamente à abcissa 1) representados pelas sucessões $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$, não deveria ser possível imaginar qualquer sucessão tendente para 1 sem que a sucessão das respetivas imagens tendesse necessariamente para 2. Infelizmente a turma não acompanhou a polémica e apenas outro aluno sustentou a argumentação, correta, de que a definição de limite obrigava a que tivéssemos a certeza de que o comportamento se aplicava a qualquer sucessão, o que não estava garantido pelo enunciado. Este argumento não foi imediatamente aceite, o que denota a dificuldade dos alunos em entender quantificadores, frequentemente usados na definição de limite. Neste caso concreto, poder-se-ia apresentar um contraexemplo relativamente simples: considerar que a função $\boldsymbol{f}$ poderá não ter o valor 2 no ponto de abcissa 1 (ser portanto descontínua nesse ponto, cenário explorado no problema 4). Mas o mais importante foi realçar que o enunciado impedia que a resposta (D) pudesse estar correta.

Alguns grupos, mais adiantados, tinham tentado resolver o exercício 4 (ver Anexo 2). Aqui a dificuldade mais frequente residiu no entendimento do enunciado. Foi preciso apoiar diversos grupos nesse sentido, uma vez que não conseguindo delimitar e decompor as várias proposições (matemáticas) que o constituíam, era-lhes obviamente difícil analisá-lo e comentá-lo. Mesmo os grupos que ultrapassaram a questão interpretativa, não conseguiram identificar que havia uma única sucessão, convergente para 2, que impedia a função de ter limite nesse ponto: precisamente a função constante. Nesta situação, para além da questão da quantificação na interpretação da definição de limite, existe também alguma resistência em considerar as sucessões constantes como obviamente convergentes (e portanto não podem ser descuradas no apuramento da existência de limite de uma função).

O exercício 5 é claramente o mais simples, atendendo à experiência adquirida na resolução dos anteriores. O desafio era reduzido, dado tratar-se de uma função contínua em $\mathbb{R}$. O objetivo consistia em confirmar que os alunos construíam a solução formulando corretamente a definição de Heine e que conseguiam chegar, na alínea c), à expressão geral do limite num ponto genérico do domínio da função. A maioria dos grupos resolveu sem dificuldade as duas primeiras alíneas mas, como nos casos anteriores, teve dificuldade em compor a solução recorrendo diretamente à definição de Heine, mesmo usando termos da linguagem corrente. Também não foram capazes, em geral, de apresentar a solução usando a notação que tinham aprendido nos limites de sucessões. Ou seja, os alunos sabiam qual o limite em cada caso (obtinham-no por simples substituição na expressão da função), mas não conseguiam exprimir o seu pensamento no papel. Quase todos os grupos bloquearam na alínea c), ao serem confrontados com o limite num ponto genérico do domínio da função. Mais uma vez foi patente a dificuldade em generalizar e trabalhar com símbolos algébricos em vez de valores numéricos.

De forma algo involuntária, precipitei o final da aula. Tendo verificado que alguns grupos já tinham abordado a questão 5 e que restavam menos de dez minutos para o termo da aula, resolvi discutir com a turma a respetiva resolução, em vez de, como habitualmente, pedir a um grupo para expor no quadro, a toda a turma, os resultados a que tinha chegado. Fi-lo pela pressão que senti em terminar a ficha de trabalho nesta aula, de forma a tentar recuperar o tempo perdido, relativamente ao plano que idealizara. Foi uma má opção, principalmente porque concluí que o exercício não conseguira atingir o objetivo de levar os alunos a, naturalmente, encontrar a solução para a alínea c). A aula terminou um tanto abruptamente, sem que pelo menos alguns alunos tivessem entendido na totalidade o limite da função no ponto genérico.

Compreendi, após a aula, que tinha de mudar de estratégia e desistir de cumprir o plano que me propusera de apresentar uma ficha de trabalho por aula. Manter o ritmo das três primeiras aulas implicaria, com elevada probabilidade, que talvez nem conseguisse, ao cabo das seis aulas previstas, abordar a álgebra dos limites. E isso veio a confirmar-se. Mas decidi que seria mais proveitoso para a turma prosseguir no esforço de uma correta apreensão do conceito de limite, em vez de saltar imediatamente para a vertente mais prática da operatória, onde tradicionalmente os alunos se mostram mais recetivos e competentes.

Coloquei a questão ao professor cooperante. Aconselhou-me a não me obstinar em cumprir, a qualquer custo, o programa que previra para as seis aulas. Tranquilizou-me dizendo que não lhe seria muito difícil recuperar a matéria que eu não iria conseguir abordar, ainda que isso implicasse alterações ao plano definido pela própria escola (com base no qual eu tinha projetado as aulas). Este apoio e conforto foi muito importante para o curso das aulas seguintes.

Aula 4 (18 de março de 2019, 11:45 às 13:15)

Nesta aula arrancou a resolução da Ficha de Trabalho nº 3 (ver Anexo 3). Tal como habitualmente, iniciei a sessão fazendo uma resenha do que tínhamos aprendido nas três aulas anteriores, recuperando em particular as conclusões do exercício 5 da ficha anterior, uma vez que a discussão do mesmo tinha ocorrido de forma bastante rápida, primordialmente a alínea c).

Em seguida, efetuei uma exposição dos assuntos que nos iriam ocupar nesta ficha e em parte da ficha de trabalho seguinte, ou seja, limites infinitos, limites no infinito e definição de limites laterais e sua relação com a existência de limite (bilateral). Esforcei-me essencialmente por transmitir a ideia de que qualquer destas novas noções são apenas extensões ou restrições à definição de limite segundo Heine que já tinha sido apresentada e treinada nas aulas precedentes.

Distribuí então a ficha de trabalho, pedindo à turma para resolver os exercícios 1 e 2. Após cerca de 15 minutos, solicitei a um dos grupos de trabalho para apresentar no quadro a respetiva resolução do exercício 1. A discussão foi bastante rápida porque, de um modo geral, todos os grupos aplicaram bem os limites laterais e concluíram que não existia limite da função no ponto de abcissa zero. Apesar de terem apresentado a notação correta, manteve-se a dificuldade de fundamentar os limites laterais recorrendo à definição de Heine. Ou seja, neste exercício os alunos começam a aplicar a operatória de limites, sem que fique evidente se realmente entenderam o conceito. Aparentemente a resposta parece ser negativa, pelo menos no que respeita a explicitarem o seu raciocínio, mesmo em linguagem informal.

Seguiu-se a discussão do exercício 2 (ver Anexo 3). Este continua a explorar limites no infinito, mas agora induzindo os alunos a expressarem e calcularem a sucessão imagem de cada uma de três sucessões objeto dadas. O caminho mais simples seria os alunos mobilizarem os conhecimentos já adquiridos sobre operatória de limites de sucessões. A função está também representada graficamente para auxiliar os alunos mais propensos a uma interpretação gráfica do conceito de limite.

Gostaria de ter selecionado uma resolução que efetivamente aplicasse a álgebra de limites. Mas infelizmente todos os grupos seguiram o caminho, mais direto mas também muito mais trabalhoso, de efetuar a substituição do termo geral de cada sucessão objeto na expressão da função. Como consequência, os alunos embrenharam-se por cálculos algébricos extensos e a maioria errou na simplificação da expressão da sucessão imagem. Achei oportuno chamar a atenção da turma para a solução alternativa de usar apenas o símbolo do termo geral de cada sucessão (cujo limite era elementar), em vez da sua expressão. Embora seja também esta a metodologia apresentada no manual da disciplina, pareceu-me que alguns alunos mostraram resistência à abordagem proposta, talvez por estarem habituados a resolver problemas algébricos de forma mecânica.

Esta fase da aula protagonizou um episódio que classifico como o pior momento durante da minha prestação no decurso das seis aulas supervisionadas. Quando estava a tentar explorar com a turma o comportamento da função de ambos os lados dos pontos de abcissa 1 e -1, hesitei porque me pareceu que iria chegar a uma conclusão distinta da que sabia ser a correta. Apercebendo-me que estava a laborar num erro mas sem o conseguir identificar imediatamente, decidi pedir aos alunos para prosseguirem na resolução das questões 3 e 4, concedendo-me assim tempo para resolver o impasse a que tinha chegado. Ao cabo de alguns minutos, percebi o que tinha sucedido e, no final da aula e início da aula seguinte, esclareci a turma e pedi desculpa pelo incidente. Foi uma boa lição para mim sobre a indispensabilidade de preparar bem qualquer aula, em especial quando se é ainda muito inexperiente. Tinha resolvido previamente todos os exercícios, mas não com o detalhe e atenção exigidos a quem tem de estar preparado para explicar, pormenorizadamente, todos os passos de cada alternativa de resolução.

O exercício 3 não tinha apoio gráfico e pretendia mostrar que uma conclusão sobre a existência de limite num ponto pode alterar-se quando se aplicam pequenas alterações ao contexto em análise. No caso concreto, o limite não existe quando consideramos duas funções separadamente, mas a situação altera-se ao tomar a função soma das funções dadas. A maioria dos grupos conseguiu concluir, através do cálculo dos limites laterais, que ambas as funções não tinham limite no ponto de abcissa zero. Mas já se notou mais dificuldade na análise da função soma. Houve grupos que intuíram que o limite passou a existir, mas nenhum conseguiu por exemplo apresentar de forma clara a expressão algébrica da nova função. Selecionei para discussão a resolução de uma equipa em que constatei que o facto do ponto zero não pertencer ao domínio das funções tinha sido usado como argumento de não existência de limite nesse ponto.

Faltavam poucos minutos para terminar a aula, sem tempo para concluir a discussão do exercício 3, pelo que decidi postergá-la para o início da aula seguinte. Alguns grupos já tinham avançado, quase todos com evidente dificuldade e solicitando o meu apoio, na exploração do exercício 4. Resolvi então pedir à turma que pensasse em casa no exercício 5, cujo objetivo era propor uma exploração prévia do conceito de ponto aderente a um conjunto. Isso pareceu-me perfeitamente razoável, uma vez que a tarefa era facilmente exequível com mobilização dos conhecimentos já adquiridos e treinados sobre limites de sucessões.

Esta aula foi particularmente pouco produtiva. A discussão dos exercícios 1, 2 e 3, exigia alguma exploração gráfica para uma mais clara perceção, pelo menos por parte de alguns alunos. O facto de a sala dispor de apenas um quadro teve impacto negativo no ritmo de trabalho. Isso já sucedera de modo evidente na primeira aula, pelo que deveria ter sido menos ambicioso e reduzido o tamanho da ficha inicialmente planeada.

Aula 5 (19 de março de 2019, 10:05 às 11:35)

Dei início à aula com um resumo do exercício 2 da Ficha de Trabalho nº 3 (ver Anexo 3), tentando assegurar-me de que a turma tinha entendido as vantagens da proposta de resolução que tinha sido apresentada na aula anterior, onde eu tivera a hesitação que me levou a optar por interromper a discussão do exercício com os alunos. Pareceu-me ser bem-sucedido, pelo menos alguns alunos mostraram-se participativos.

Seguiu-se a discussão do exercício 3, com base na resolução de um grupo que demonstrara estranheza pelo facto do limite do enunciado incidir sobre um ponto não pertencente ao domínio das funções (“Então, mas tu não podes fazer isso porque não podes substituir por zero.”, foi um dos argumentos que registei). O debate incidiu essencialmente sobre a necessidade de treinar e utilizar a notação matemática adequada à tradução dos raciocínios. Por exemplo, nenhum grupo apresentou a expressão da função soma, apesar de alguns terem conseguido explicar a existência do limite.

Uma vez que a maioria dos grupos já tinha trabalhado a questão 4 na aula anterior, passou-se de imediato à respetiva discussão, a partir de uma resolução apresentada no quadro. Praticamente toda a turma denotou estranheza na interpretação do enunciado desta tarefa. Tratava-se do primeiro exemplo explícito de limite no infinito. Um dos grupos que apoiei trocou o papel do eixo das abcissas com o das ordenadas, considerando que os limites estavam a ser calculados nos pontos ‘2’ e ‘-2’. Uma confusão semelhante ocorrera com outros grupos, nomeadamente não sabendo em que eixo considerar os valores tomados pelas sucessões do enunciado. Foi claramente o problema da ficha em que senti mais obstáculos de abordagem pelos alunos. Pareceram bloqueados, sem saber por onde começar. Mereceram por esse facto atenção redobrada da minha parte as reações ou silêncios da turma durante a respetiva discussão. Foi uma discussão bastante longa, em que tentei interpelar várias vezes a turma, fomentar que fossem os próprios alunos a esclarecer as dificuldades dos seus colegas, mas fiquei com a sensação de que o desafio colocado pelo exercício não foi inteiramente superado por boa parte da turma.

Tivemos de avançar para a questão 5. Constatei imediatamente que apenas um aluno tinha refletido em casa sobre este exercício. Resolvi por isso conceder algum tempo à turma para a respetiva exploração. Mais uma vez, alguns grupos de trabalho tiveram dificuldade em interpretar o enunciado, nomeadamente o facto de ser exigido que todos os termos das sucessões solicitadas pertencessem ao conjunto dado.

O exercício 5 destinava-se a preparar os alunos para a definição de ponto aderente, por sua vez explorada no exercício 1 da Ficha de Trabalho nº 6 (ver Anexo 6). Quer o programa, quer o manual adotado da disciplina, introduzem a definição de limite segundo Heine com a noção de ponto aderente a um conjunto. No planeamento das aulas decidi no entanto, depois de uma troca de impressões com o professor cooperante, ser preferível arriscar outra abordagem, de modo a não sobrecarregar os alunos com duas definições de uma só vez, podendo até distraí-los do objetivo fundamental a atingir. Eis a razão pela qual o conceito de aderência apenas é formalmente tratado na quinta e sexta aula. Julgo que, de um modo geral, os alunos interiorizaram o conceito, ainda que alguns tenham denotado alguma hesitação em aplicá-lo nos exercícios com que foram confrontados.

Ficou assim concluída a Ficha de Trabalho nº 3. A aula terminou com a conclusão de que apenas faz sentido calcular o limite de uma função num ponto que seja aderente ao seu domínio. Se o ponto não pertencer à aderência do domínio, o limite não existe.

Aula 6 (25 de março de 2019, 11:45 às 13:15)

Esta aula, à semelhança das aulas 1 e 3, teve lugar numa sala com apenas um quadro escolar disponível, devido à alteração ocorrida em consequência da paralisação por greve na semana anterior. Notou-se alguma inércia da turma em retomar o tema dos limites, talvez devido ao intervalo de cinco dias sem aulas, incluindo um fim-de-semana. Tentei combater a aparente apatia e (re)mobilizar os alunos para o tema. O que não foi fácil, para o que terá também contribuído a realização prevista de um miniteste de avaliação no final da aula.

A aula iniciou-se com a recordação do final da aula anterior, isto é, da definição de ponto aderente de um conjunto e a sua relação com a definição de limite de uma função. Distribuí a Ficha de Trabalho nº 4 (ver anexo 4) e pedi aos alunos para iniciarem a respetiva resolução. Alertei para a importância de ler com atenção a definição de ponto aderente (na própria ficha ou no manual), antes de se lançarem na resposta à questão 1.

O exercício 1 não gerou polémica, ainda que tenhamos perdido bastante tempo na identificação de propostas de sucessões para cada uma das alíneas. Alguns alunos avançavam com sucessões inadequadas, quase sempre foi possível efetuar as correções através da intervenção crítica de outros colegas. Apesar de praticamente todos os grupos terem resolvido corretamente as diversas alíneas, tornou a verificar-se alguma atrapalhação no entendimento do texto da definição apresentado no enunciado (extraído ‘ipsis verbis’ do manual).

O exercício 2 traduz um exemplo de limite infinito no infinito. Os alunos resolveram bem, de um modo geral, a alínea a), mas logo surgiram os bloqueios habituais perante o pedido de demonstração requerida na alínea b). Os registos escritos confirmaram o que observei durante a aula, uma enorme dificuldade em justificar as respostas apresentadas para cada questão. Alguns grupos não estavam certos do significado de função ímpar, o que os impediria, sem apoio, de resolver a alínea b).

Finda a discussão do exercício 2, constatei não haver tempo para prosseguir com a questão 3. Verifiquei que alguns grupos já tinham avançado na respetiva resolução, mas outros, mais atrasados, só agora se dispunham a iniciá-la. Decidi por isso recolher os enunciados e distribuir o miniteste de avaliação.

O resto da aula foi pois preenchido com a resolução do miniteste (ver Anexo 6). Uma vez que os alunos pediram para não haver registo áudio da sua atividade, não me apercebi de contrariedades por eles enfrentadas, para lá de um ou outro pedido de esclarecimento sobre aspetos do enunciado. No entanto, a avaliar pelos resultados obtidos (ver Figura 3-3 deste capítulo), o desempenho geral foi bastante acima do que eram as minhas expectativas. Manteve-se a repetida dificuldade dos alunos em justificar convenientemente as suas decisões na resolução de tarefas, bem evidenciada por exemplo nas respostas à questão 3 (a última do miniteste, com grau de dificuldade ligeiramente superior às anteriores).

Foi esta a minha última aula supervisionada, pelo que não foi possível terminar a Ficha de Trabalho nº 4, nem abordar as propriedades operatórias de limites de funções, o levantamento de indeterminações e outros teoremas importantes como o relativo ao produto de uma função limitada por outra de limite nulo. Seriam os temas das fichas de trabalho número 5 e 6 (ver Anexos 5 e 6, respetivamente).

Capítulo 4 - Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados

Em termos metodológicos, adotou-se, no presente estudo, um modelo de cariz interpretativo (por oposição a modelos que seguem um paradigma normativo, tal como descrito em Cohen, Manion & Morrison, 2007), com ênfase na identificação de relações com significado e respetivas consequências nos temas em estudo. Como ferramenta analítica, procurou-se respeitar as técnicas e boas práticas de análise de conteúdo, quer na vertente da linguagem/discurso (oral e escrito) quer do sentido/significação (Bardin, 1977).

Os participantes são alunos de Matemática A do 11.º ano do ensino secundário, curso de Ciências Socioeconómicas. Integram uma turma que acompanhei regularmente durante todo o ano letivo (2018-2019), primeiro no âmbito da disciplina Iniciação à Prática Profissional III (IPP-III) e finalmente em IPP-IV, onde ocorreram as aulas supervisionadas a que se refere a maioria dos dados recolhidos. A seleção dos alunos e grupos de trabalho envolvidos na colheita de informação obedeceu a critérios de diversidade sobre o sexo, a idade, o nível de desempenho a Matemática, a capacidade de expressão escrita ou oral e o comportamento em sala de aula. A decisão baseou-se não só em notas de campo recolhidas durante as aulas assistidas, mas essencialmente em contributos e perceções obtidas de interações frequentes com o professor cooperante.

Recolha de Dados

A recolha de dados é fundamental para a realização de qualquer estudo empírico de natureza científica. Convém usar diferentes fontes e métodos de recolha, de modo a aumentar a confiança e fiabilidade dos mesmos e dessa forma tornar mais credíveis, robustas e consistentes as conclusões, conjeturas ou evidências apresentadas no estudo realizado. É igualmente importante ter presente que técnicas e métodos de recolha de dados não estão dissociadas do propósito do investigador (Cohen, Manion & Morrison, 2007).

A recolha de dados para este estudo baseou-se essencialmente em três métodos, a saber: observação, recolha documental e entrevistas. Os dados recolhidos foram organizados e analisados com o objetivo de tentar encontrar respostas para as questões em estudo neste trabalho.

Iremos de seguida descrever os métodos subjacentes à recolha de dados das diferentes fontes referidas (observação das seis aulas com recolha de notas de campo, recolha de produções escritas pela turma e duas entrevistas a alunos), tomando como orientação fundamental as recomendações de Cohen, Manion e Morrison (2007).

Observação

A observação tem óbvias vantagens sobre outras formas de recolha de dados. A sua relevância prende-se em boa medida por ter subjacente uma certa informalidade, permitindo por exemplo captar as intervenções espontâneas dos alunos, expressões, atitudes, trocas de argumentos, elementos importantes na identificação das dificuldades evidenciadas pelos alunos durante o processo de aprendizagem do conteúdo em estudo. Outro benefício é permitir ao professor uma análise e reflexão ‘na hora’, isto é, introduzir adaptações ou replanear as aulas seguintes, de modo a melhor corresponder às dificuldades, dúvidas e respostas apresentadas pelos alunos nas observações já realizadas.

Em termos do envolvimento do investigador no objeto da observação, estamos perante um tipo de observação participante (Becker & Geer, 1969). Dado o comprometimento do professor nas ações em sala de aula, questionando, ouvindo, comentando, há uma interação permanente e envolvimento do mesmo nas atividades dos alunos. O professor deve ter consciência desta sua presença e intervenção no que está a observar, tentando alcançar um equilíbrio entre a sua função principal de professor e o papel circunstancial de investigador, evitando que um dos papéis introduza fatores de distração sobre o outro. O foco na lecionação não pode ofuscar os objetivos da investigação, tarefa extremamente difícil.

A observação com recolha de notas de campo e complementada com gravações áudio, é o método de recolha de dados de utilização mais sistemática durante as aulas lecionadas neste estudo. Revelou-se também, quando comparado por exemplo com a produção escrita pelos alunos, como o instrumento mais importante pelo qual foi possível inferir as principais dificuldades e obstáculos manifestados pelos alunos na aprendizagem do conceito de limite.

Procurou-se, na recolha de dados efetuada, atenuar os efeitos indesejáveis resultantes do duplo papel de pesquisa/observação e mediador/interventor em que se encontra o professor, o que impossibilita a sua ‘ausência’, no sentido em que inevitavelmente intervém nos resultados registados. Esta duplicidade do professor impede-o de atuar como um observador exterior aos fenómenos em análise, uma vez que forçosamente condiciona e é ator nos acontecimentos envolvidos no estudo. Apesar disso, durante a lecionação propriamente dita, é a função de professor que prevalece sobre a de investigador nas atividades em sala de aula. O recurso a gravações áudio, menos intrusivo que a captação de imagens (razão principal porque se decidiu não utilizar o vídeo nesta recolha de dados), contribui também para reduzir eventuais perturbações induzidas por um excesso de preocupação por parte do professor no registo direto de informação em sala de aula. Se acrescentarmos o bom relacionamento entre o professor e a turma, o acompanhamento da mesma desde o início do ano letivo e o apoio constante do professor cooperante, é possível concluir que a minha presença não tenha introduzido perturbações significativas ao normal decurso das aulas lecionadas, nomeadamente no que se refere às reações, interações e comportamento habitual dos alunos.

Não obstante, convém recorrer a técnicas que tornem a recolha de dados de observação o mais fiel possível. Sem nunca esquecer o respeito pelas questões de natureza ética, as notas de campo devem ser descritivas, detalhadas e concretas, de forma a permitir uma reflexão cuidada e rigorosa sobre as mesmas.

Para além do nível adequado de detalhe em termos descritivos, as notas de campo devem permitir responder a questões como ‘quem’, ‘como’, ‘o quê’, ‘quando’, ‘onde’ e ‘porquê’, relativamente às diversas categorias objeto de observação, seja direta ou indireta. É também indispensável que respeitem a ordem cronológica dos acontecimentos. Sugere-se inclusivamente a elaboração de uma ‘checklist’ de verificação de conteúdo das notas de campo, envolvendo aspetos como espaço, atores, atividades, objetos/artefactos, ações e reações, eventos, tempo, objetivos e sentimentos expressos (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Não significa que todas estas dimensões tenham de estar sempre presentes em qualquer observação, mas que o investigador deve conhecer e estar atento a toda esta diversidade de perspetivas de molde a captá-las caso se manifestem.

Ainda segundo os mesmos autores, as observações devem ser reflexivas, no sentido de que as descrições e análises efetuadas têm de ser comentadas quanto a aspetos como metodologia utilizada, questões éticas, dilemas, atitudes e emoções, pontos a clarificar ou possíveis caminhos a explorar em observações ou investigações subsequentes. Não esquecer por exemplo que ao compilar e analisar as intervenções dos alunos, o objetivo é não só identificar dúvidas e dificuldades, mas finalmente contribuir para a elaboração de estratégias para as ultrapassar e facilitar o processo de ensino-aprendizagem das matérias em estudo.

No decurso das seis aulas que integraram a minha intervenção letiva, coloquei gravadores de áudio em diferentes grupos de trabalho (de dois ou três alunos cada). Na impossibilidade de cobrir todos os grupos, usei o conhecimento de que dispunha da turma para abranger aqueles que de alguma forma representassem a diversidade de alunos da turma. É de assinalar que mesmo alguns alunos relutantes em serem filmados não mostraram qualquer resistência na recolha de informação áudio. Uma vez que as equipas foram constituídas de forma a integrar alunos de níveis de aprendizagem distintos, não existem variações extremas de rendimento entre elas, determinadas por desequilíbrio no grau de conhecimento.

Da escuta das gravações áudio parece poder-se concluir que a presença dos gravadores não terá condicionado de forma significativa o trabalho de cada grupo. Pelo contrário, nalguns grupos é patente a preocupação dos alunos, pelo facto de estarem a ser observados, em serem mais voluntariosos e eficientes na abordagem da tarefa que lhes era proposta. Ou seja, tudo nos leva a crer que o condicionamento fez-se sentir no sentido positivo, na medida em que aumentou o nível de responsabilização dos alunos em se concentrarem e cooperarem na exploração de soluções e alternativas para os problemas com que foram confrontados.

O recurso à gravação como método de registo de dados teve outra vantagem. Uma vez que a observação atravessa todos os momentos de aula, foi possível gravar também as minhas interações com cada equipa de trabalho, ao circular pela aula procurando seguir o trabalho autónomo dos alunos e respondendo às suas solicitações. São elementos fundamentais para perceber dificuldades e analisar raciocínios, permitindo selecionar questões a colocar à turma, eleger trabalhos a apresentar nos momentos de correção, discussão e sistematização de resultados, repensar o planeamento das aulas e tarefas seguintes.

Recolha Documental

A recolha documental incidiu sobre as produções dos próprios alunos ao longo das aulas por mim lecionadas. Constituiu assim outra fonte de informação essencial na análise de dados. Permite identificar as estratégias e processos adotados pelos alunos, dificuldades que sentiram e perceber evoluções na respetiva aprendizagem.

A experiência de aulas anteriores determinou um especial cuidado e atenção na obtenção da informação documental, uma vez que é frequente os alunos alterarem os seus registos durante a aula, apagando dados que são essenciais para entender o raciocínio e obstáculos que encontraram. A relevância da informação perdida não pode ser subestimada, se pensarmos que a maior parte dos alunos tende a substituir (em vez de complementar ou corrigir, às vezes até por razões de espaço disponível) os seus registos pelos que são apresentados nas resoluções escritas no quadro. Este fenómeno é agravado pelo facto de os alunos saberem que o seu trabalho irá ser objeto de registo e estudo por parte do professor. Apesar dos meus esforços em explicar aos alunos que a minha tarefa, no âmbito desta pesquisa, não era de avaliação sumativa do seu desempenho, a cultura ainda dominante no universo escolar é a da punição e medo diante do erro.

Para tentar ultrapassar esta dificuldade, foram distribuídos aos alunos um enunciado em que registavam o trabalho autónomo e uma cópia no momento da discussão e correção de cada tarefa. Cada grupo usava a cópia para registar a resolução (ou resoluções alternativas) apresentada no quadro no momento da discussão. De um modo geral, os alunos respeitaram esta regra e não apagaram ou rasuraram os registos da fase de resolução autónoma.

A opção por fichas de trabalho em que se reserva espaço para apresentação da resolução tem vantagens e desvantagens. Como vantagens, identificamos quer a facilidade no registo e análise dos dados, quer o facto de ser a metodologia usada pelo professor cooperante, a que os alunos já estavam acostumados. Ainda assim, há muitos alunos que têm dificuldade em gerir adequadamente o espaço reservado à resolução, mesmo quando este é generoso. A desvantagem mais relevante talvez seja induzir no aluno alguma inibição em explorar o problema transcrevendo o seu raciocínio em jeito de rascunho, uma vez que muito provavelmente terá de apagar e reescrever de forma organizada e mais clara a resolução proposta. Em alternativa, poderá sempre recorrer a um outro suporte como rascunho, mas constatei que são raros os alunos que o fazem e normalmente isso conduz a dificuldades na gestão do tempo.

Apesar de os alunos nem sempre redigirem de forma clara, quer em termos de grafia, quer de significação, a recolha documental das produções dos alunos revelou-se muito importante para dar resposta às questões em estudo neste trabalho investigativo.

São a fonte principal para perceber as estratégias de resolução adotadas para os desafios colocados nas diferentes tarefas. Evidenciam igualmente as dificuldades sentidas pelos alunos, quer de conhecimento do tema proposto, quer em registar no papel raciocínios que frequentemente estão formalmente corretos e adequados à resolução da tarefa com que estão confrontados. Quanto a este último ponto, o complemento do registo documental escrito com a observação direta é por vezes muito valioso e revelador do tipo de obstáculos que impede os alunos de demonstrar e manifestar o seu estádio de aprendizagem no tema ou domínio para que está a ser mobilizado. Outra vantagem da recolha documental é ser um importante instrumento de avaliação do ritmo de evolução dos alunos na compreensão e apreensão do conceito de limite, ao longo das seis aulas em que consistiu a minha lecionação supervisionada. Permite igualmente perceber os efeitos de pequenas correções ou inflexões introduzidas no planeamento das aulas, decorrentes da experiência obtida em aulas anteriores.

No sentido de enriquecer a informação respeitante à evolução do conceito de limite no decurso das seis aulas lecionadas, os alunos foram confrontados com uma pergunta aberta e direta sobre o tema, colocada no início da primeira sessão e repetida após a sexta aula. As respostas foram muito interessantes e alinhadas com o conjunto de dados recolhidos pelas outras fontes, tanto no que respeita à explicitação de limitações na expressão escrita das ideias, como mais uma manifestação das dificuldades, resistências e estereótipos revelados pelos alunos na aprendizagem do conceito.

A recolha documental inclui um miniteste de avaliação sumativa realizado no final da sexta aula lecionada.

Entrevistas

Dada a complexidade do assunto em estudo e a dificuldade que previra em conseguir identificar e evidenciar a evolução da compreensão dos alunos sobre o conceito de limite, resolvi recorrer a duas entrevistas de forma a tentar confirmar, clarificar e aprofundar as informações recolhidas pela observação e recolha documental.

A preparação das entrevistas foi fundamental, quer no que respeita ao seu conteúdo, quer na própria seleção dos entrevistados. Neste último ponto foi importante uma análise prévia da matéria recolhida pelos outros métodos, identificando possíveis lacunas ou aspetos que necessitavam de melhor clarificação ou confirmação.

Para o sucesso das entrevistas foi também relevante que os alunos entrevistados não a considerassem como mais um momento de avaliação formal a que estão normalmente habituados. Tentei desenvolver estratégias, nomeadamente de comunicação e contextualização, que minorassem este efeito, quer na preparação prévia de entrevista, quer no tipo de questões e modo como foram formuladas. Tratou-se de entrevistas curtas, com duração de cerca de 20 minutos, privilegiando a objetividade e síntese, procurando evitar a saturação do aluno e respostas pouco refletidas.

Inicialmente pensei em recorrer a entrevistas escritas e orais. Dada a extrema parcimónia manifestada pela maioria dos alunos na expressão escrita, resolvi realizar apenas entrevistas orais. Escolhi um aluno e uma aluna, ambos com aproveitamento médio e com oscilações significativas de avaliação na disciplina ao longo do ano letivo. Concluí, a partir da análise dos dados recolhidos das diferentes fontes e de consulta ao professor cooperante, tratarem-se de dois alunos que poderiam fornecer informação adicional relevante para responder a algumas das questões em estudo no presente trabalho. E isso veio a confirmar-se.

Por manifesta falta de tempo, não foi possível efetuar entrevistas a mais alunos. Não obstante, questiono-me até que ponto mais entrevistas iriam acrescentar novas informações para responder às questões formuladas. A turma revelou-se genericamente bastante fraca a Matemática, pelo que a mesma entrevista aplicada aos alunos de menor aproveitamento é muito provável que apenas confirmasse as dificuldades já patenteadas nos documentos e evidências recolhidas durante as aulas. Foi também esta convicção, para além da escassez de tempo, que determinou a escolha dos dois estudantes e a decisão de não alargar a entrevista a um maior número de alunos.

A entrevista abordou aspetos gerais sobre o curso das aulas lecionadas, centrando-se no entanto em dois pontos reveladores da perceção dos alunos do conceito de limite. Um relacionado diretamente com a definição de limite segundo Heine; o outro mais subtil, reproduz um exercício comum na literatura didática sobre a igualdade entre a dízima infinita 0,(9) e a unidade. Em ambos os casos foi notória a dificuldade demonstrada pelos alunos na efetiva aprendizagem do conceito de limite, revelando alguns dos obstáculos cognitivos que lhe estão frequentemente subjacentes.

Elaborei um guião da entrevista, de modo a que fosse o mais estruturada possível e igual para ambos os alunos. Tive também o cuidado de, perante as dificuldades demonstradas pelos alunos nas questões fundamentais colocadas, tentar orientá-los e remetê-los para situações semelhantes recordadas das aulas lecionadas, de forma a percecionarem que não se tratava efetivamente de questões novas, mas de assuntos cuja abordagem residia nos conhecimentos adquiridos sobre limites (na linha aliás do que é recomendado pelo [NCTM, 2000] e no programa e metas curriculares [ME, 2013], no que respeita à resolução de problemas em diferentes contextos).

Finalmente refira-se que o exemplo ilustrado na entrevista foi utilizado e estudado, em circunstâncias e com objetivos diversos, por autores como Tall (1980), Tall & Vinner (1981), Schwarzenberger (1978) e Sierpinska (1987).

A recolha de dados, independentemente da metodologia utilizada, obedeceu sempre a estritas regras de ética e confidencialidade. Não só se obteve autorização expressa dos encarregados de educação para a realização das gravações, como se tomou em consideração a vontade e disponibilidade do aluno em cada contexto concreto em que a recolha se realizou (ver Anexo 7, Autorização Encarregados de Educação). Por exemplo, houve alunos que manifestaram desconforto em serem gravados durante a realização do miniteste de avaliação, o que foi imediatamente respeitado. Para além disso, todos os nomes presentes nas transcrições são fictícios, bem como se rasuraram ou omitiram as identificações de alunos nos extratos digitalizados.

Análise de Dados

A análise de conteúdo realizada sobre os dados recolhidos, independentemente da fonte dos mesmos, baseou-se nas regras e procedimentos descritos por Bardin (1977), incluindo algumas considerações complementares obtidas de Franco (2008). A metodologia está esquematizada no diagrama da Figura 4-1.

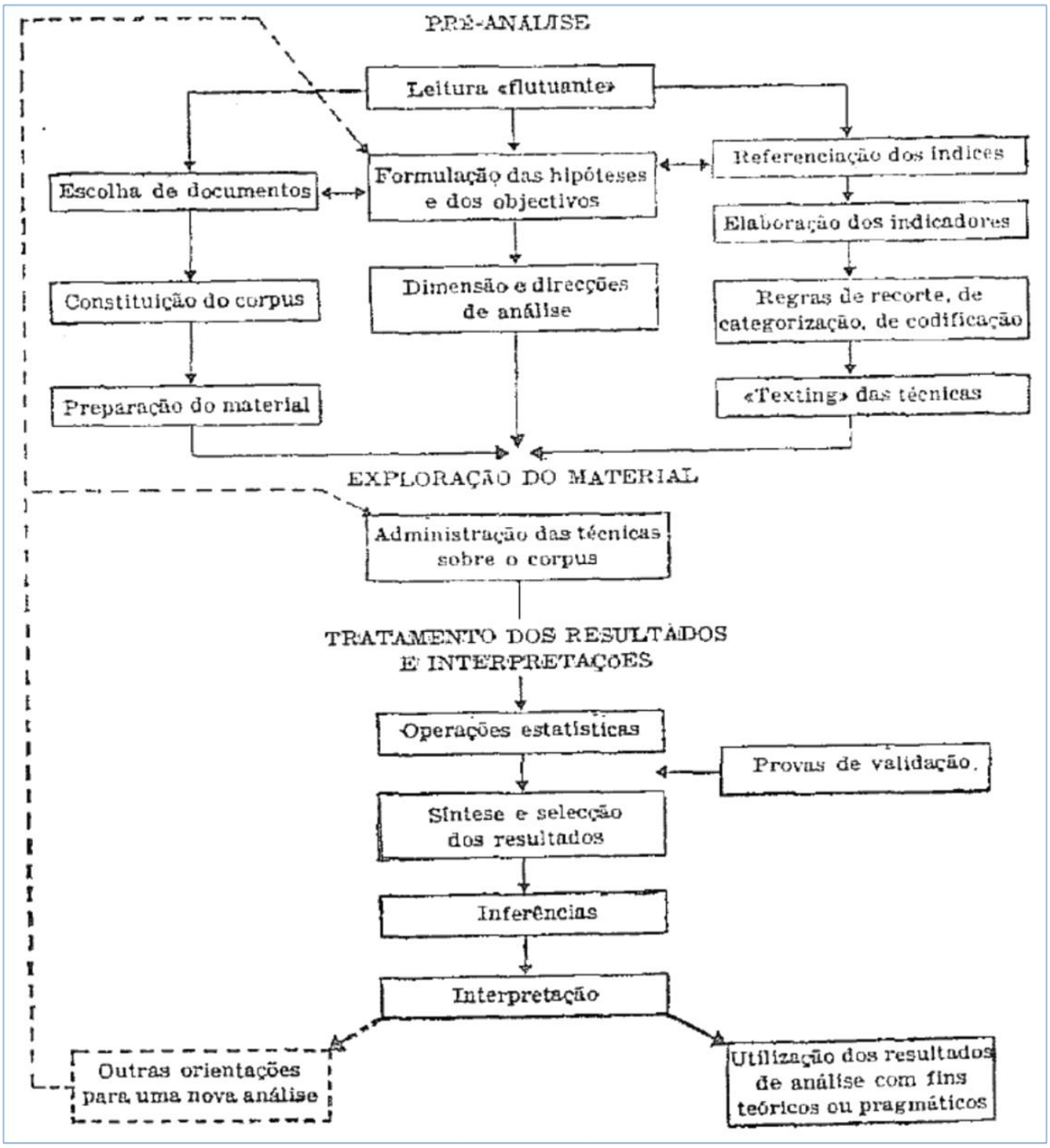


Figura 4-1: Desenvolvimento de uma análise de conteúdo (Bardin, 1977, p.102)

Começou-se por transcrever as gravações áudio realizadas. No entanto a transcrição não deve ser uma reprodução direta do que ficou gravado. Procurou-se usar códigos que permitissem perceber, na versão transcrita, traços da oralidade como silêncios, hesitações, interrupções, exclamações, espanto, interrogações, etc, para o que também ajudou o conhecimento dos intervenientes e algumas notas de campo recolhidas em contexto.

Em primeiro lugar, convém "dizer não à leitura simples do real", despistar as primeiras impressões, evitando os perigos de uma "compreensão espontânea" e "ilusão de transparência" dos factos. Esta atitude de "vigilância crítica", afigura-se tanto mais útil e necessária quanto maior a impressão de familiaridade do investigador face ao objeto em estudo (Bardin, 1977).

Procurou-se passar por cada uma das fases cronológicas de análise de conteúdo, a saber: *pré-análise*, *exploração do material* e *tratamento de resultados* (recorrendo à inferência e interpretação).

A *pré-análise* é por excelência a fase de organização dos dados. Possui habitualmente três missões: *escolha dos documentos* a submeter à análise, *formulação de hipóteses e objetivos* a atingir e a *elaboração de indicadores* (após referenciação de índices) que fundamentem a interpretação final (Bardin, 1977). A pré-análise tem por objetivo a organização, embora ela própria seja composta por atividades não estruturadas, abertas, por oposição à exploração sistemática dos documentos (exemplo: a chamada "leitura flutuante" da documentação, progressivamente mais precisa). No final desta fase dever-se-á ter constituído um "corpus", isto é, o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos. A sua construção implica escolhas, seleções e regras: exaustividade, não seletividade, representatividade, homogeneidade e pertinência (Bardin, 1977).

Se a pré-análise for bem conduzida, a *exploração do material* consistirá basicamente na administração sistemática das decisões tomadas. Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente na realização de operações de codificação, desconto e enumeração, em função de regras previamente formuladas (Bardin, 1977). Nesta fase pode ser útil o recurso à computação. No entanto, no caso do presente trabalho, a análise foi eminentemente qualitativa e envolveu um volume de informação limitado, pelo que se recorreu a um tratamento manual dos dados na identificação categorial.

A última fase, *tratamento dos resultados obtidos e interpretação*, apoia-se na emergência de categorias de análise aplicáveis às questões em estudo. Os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos («falantes») e válidos. Nas análises de maior volume e complexidade, para um maior rigor, os resultados podem ser submetidos a provas estatísticas e testes de validação. O analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas (Bardin, 1977).

A categorização, usada na análise temática dos dados, é assim uma operação fundamental na análise de conteúdo, perpassando as fases de pré-análise e exploração do material. Uma boa categorização pressupõe igualmente um conjunto de qualidades como *exclusão mútua*, *homogeneidade*, *pertinência*, *objetividade/fidelidade* e *produtividade*. Bardin citando Berelson, afirma mesmo que "A análise de conteúdo suporta-se ou soçobra pelas suas categorias" (Bardin, 1977, p.117).

Foi esta a metodologia aplicada no presente estudo, ainda que com simplificações determinadas pela dimensão e características dos dados recolhidos, bem como pelo cariz iminentemente qualitativo e exploratório da pesquisa realizada. A análise de dados iniciou-se assim com a transcrição das entrevistas e dos registos áudio das aulas. Passou-se, de seguida, à organização e sistematização da informação e sua respetiva seleção. A análise de conteúdo, tal como descrito acima, permitiu identificar um conjunto de categorias moldadas pela teoria e posteriormente ajustadas aos dados recolhidos (Quadro 4-1).

Quadro 4-1: Categorias de análise por questão do estudo

Questão do estudo	Categorias de análise
Conceito de limite que os alunos apresentam	Compreensão da definição de Heine
	Representação simbólica e algébrica do conceito
	Distinção entre função e o seu limite
	Limite de sucessão e limite de função
	Limite em pontos não pertencentes ao domínio da função
	Relação entre limite e valor da função no ponto
	Representação gráfica do conceito
Conflitos cognitivos inibidores da apreensão do conceito de limite	Atingimento efetivo do limite
	Limite da função constante
	Aspetos metafísicos da noção de limite (Cornu, 2002)
	Conceito-imagem e conceito-definição
	Resiliência (permanência no tempo)

Questão do estudo	Categorias de análise
Mobilização do conceito de limite na resolução de problemas e principais dificuldades evidenciadas pelos alunos	Perceção da utilidade do conceito
	Modelação matemática de problemas
	Destreza no cálculo algébrico
	Conceito de função
	Características de uma função
	Representação cartesiana de uma função
	Utilização adequada e pertinente da calculadora gráfica
	Notação matemática
	Atitude em sala de aula
	Iniciativa
	Espírito crítico
	Manuseamento da língua portuguesa (leitura, escrita e verbal)

Capítulo 5 – Análise de Dados

Neste capítulo procede-se à análise dos dados recolhidos no decorrer das seis aulas lecionadas, com o objetivo de encontrar respostas para as questões fundamentais selecionadas no presente estudo.

Todos os episódios e cenários descritos nas secções seguintes foram extraídos de casos reais. Os atores intervenientes foram anonimizados com a atribuição de nomes fictícios (ver Anexo 7, Autorização Encarregados de Educação).

O conceito de limite que os alunos apresentam

De um modo geral, os alunos demonstraram dificuldade em perceber a definição de Heine, pelo que não espanta que fosse raro o grupo de trabalho que conseguisse resolver, de forma autónoma, as tarefas que apelavam à aplicação daquela definição. A título de exemplo, atente-se neste diálogo ocorrido durante a entrevista efetuada a dois alunos:

> **Professor**: Serias capaz de enunciar por palavras tuas, usando palavras tuas, a definição de limite de uma função segundo Heine?
> **Pedro**: Então, é basicamente quando… uma função… quando o limite… quando ‘x’ tende para alguma coisa…
> **Professor**: Sim…
> **Pedro**: …o limite tende para outra coisa, ou seja, a definição era ‘a’ e o limite tendia para ‘b’ mas…
> **Professor**: Mas quando dizes, por exemplo limite quando ‘x’ tende para ‘a’ de uma função, o que é que quer dizer ‘x tende para a’? Lembras-te do que é que quer dizer ‘x tende para a’?
> **Pedro**: Então que… no nosso gráfico nós estamos a tender para aquele… para o ‘a’, para aquele ‘x’.
> …

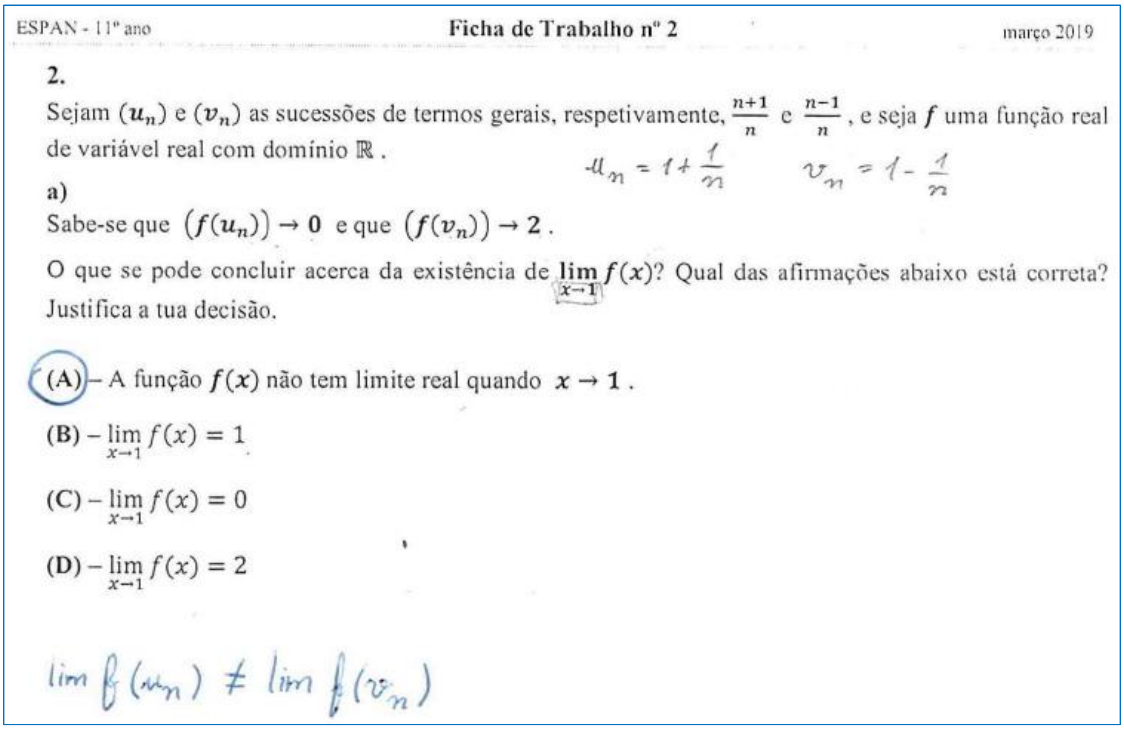
A resposta do Pedro é confusa, a linguagem a que recorre muito vaga e desestruturada. Mesmo após a tentativa de lhe organizar o pensamento focando-o na sucessão de objetos, o aluno responde usando argumentos de natureza gráfica que estão ausentes na definição de Heine. Além disso, usa a expressão ‘tende para’ sem a conseguir descodificar. Em suma, não é capaz de apresentar a definição de Heine, embora pareça ter percebido que a mesma envolve dois limites distintos, ainda que não explicite estar um ligado ao objeto e outro à sua imagem, ou seja, à função.

A Mariana foi confrontada exatamente com a mesma questão e mostrou ainda maior dificuldade que o Pedro na resposta, uma vez que primeiro pareceu não identificar

Heine, depois necessitou de concretizar o raciocínio com recurso à noção de limite lateral, finalizando por evidenciar a interpretação frequente de limite como uma simples concretização da função num ponto:

> **Professor**: Por palavras tuas, conseguirias enunciar qual é a definição de limite de uma função segundo Heine?
> **Mariana**: …
> **Professor**: Heine, lembras-te que…
> **Mariana**: Sim.
> **Professor**: …é aquele senhor… de que nós usamos a definição de limite, de acordo com a forma como ele a deu. Consegues lembrar-te disso…? Por palavras tuas, qual é a definição de limite de uma função segundo Heine?
> **Mariana**: Então… é aquilo da…
> **Professor**: Diz, diz…
> **Mariana**: …esquerda e da direita.
> **Professor**: Diz, por palavras tuas, depois eu comento.
> **Mariana**: Eu acho que o limite de uma função, por exemplo quando ‘x’ tende para zero,…
> **Professor**: Por exemplo, sim…
> **Mariana**: … para descobrirmos temos de fazer o limite dessa função quando ‘x’ tende para zero menos e quando ‘x’ tende para zero mais. E depois, se der igual é porque há limite quando ‘x’ tende para zero.
> **Professor**: Muito bem. Isso está correto. Então vamos por exemplo ver o limite quando ‘x’ tende para zero menos.
> **Mariana**: Hum, hum…
> **Professor**: Como é que tu raciocinas?
> **Mariana**: Então, vou à função e substituo ‘x’ por zero.
> …

O mesmo aconteceu na resolução de todos os exercícios em que era solicitado aos alunos que aplicassem a definição de Heine. Por exemplo, na resolução das questões 1 e 2 da Ficha de Trabalho nº 2, apenas um grupo de trabalho (Susana e Rita, que inclui o aluno com avaliação mais elevada na turma) conseguiu responder com alguma argumentação e, mesmo nesse caso, apenas à alínea 2.a) (Figura 5-1). Todos os outros grupos limitaram-se a assinalar a resposta que achavam estar certa, sem avançar com qualquer razão para a sua decisão (apesar do enunciado e o professor acentuarem essa necessidade). Este procedimento foi muito frequente, em especial nas respostas a questões de escolha múltipla (Figura 5-2).



ESPAN - 11º ano **Ficha de Trabalho nº 2** março 2019

2.

Sejam (u_n) e (v_n) as sucessões de termos gerais, respetivamente, $\frac{n+1}{n}$ e $\frac{n-1}{n}$, e seja f uma função real de variável real com domínio $\mathbb{R}$.

$u_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\quad v_n = 1 - \frac{1}{n}$

a)

Sabe-se que $(f(u_n)) \to 0$ e que $(f(v_n)) \to 2$.

O que se pode concluir acerca da existência de $\lim\limits_{x\to1} f(x)$? Qual das afirmações abaixo está correta? Justifica a tua decisão.

(A) – A função $f(x)$ não tem limite real quando $x \to 1$.

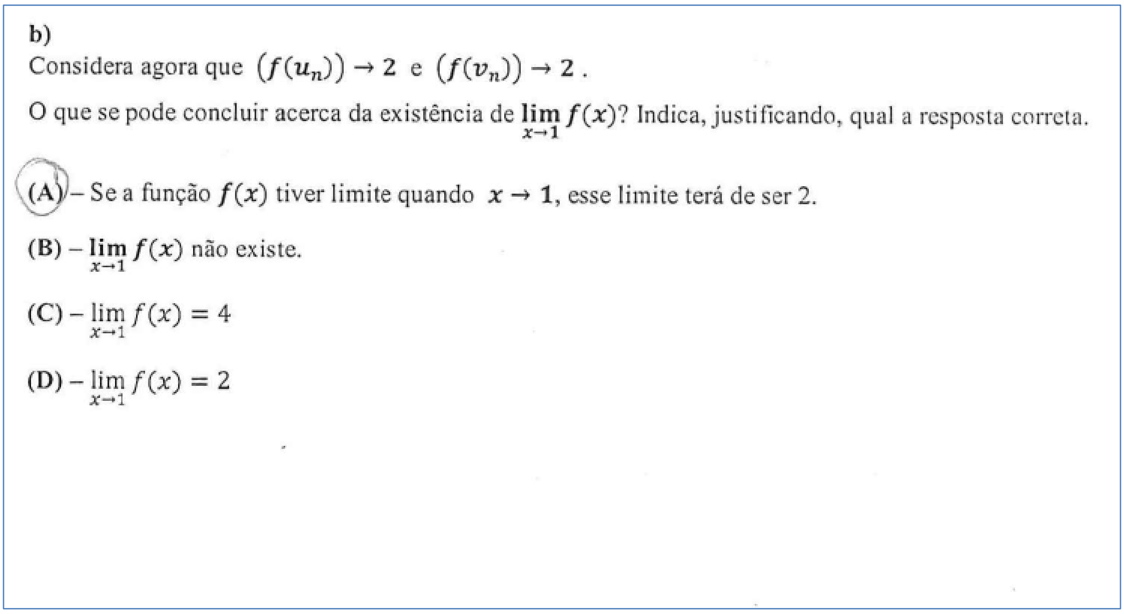
(B) – $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$

(C) – $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$

(D) – $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$

$\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$

Figura 5-1: Resolução da questão 2.a) da Ficha de Trabalho nº 2 (Susana e Rita)



b)

Considera agora que $(f(u_n)) \to 2$ e $(f(v_n)) \to 2$.

O que se pode concluir acerca da existência de $\lim\limits_{x\to1} f(x)$? Indica, justificando, qual a resposta correta.

(A) – Se a função $f(x)$ tiver limite quando $x \to 1$, esse limite terá de ser 2.

(B) – $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ não existe.

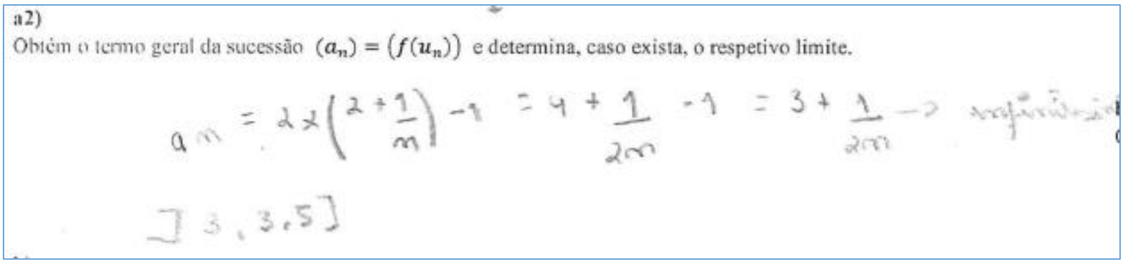
(C) – $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 4$

(D) – $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$

Figura 5-2: Tipo de resolução frequente de questões de escolha múltipla com pedido expresso de justificação (exercício 2.b., Ficha de Trabalho nº 2, alunas Rafaela e Catarina)

Não tendo sido possível encontrar evidências de que os alunos, pelo menos a sua maioria, tenham entendido a definição de Heine, foi também difícil perceber o conceito de limite apreendido, uma vez que os alunos aliam às dificuldades no uso da notação matemática uma grande economia no recurso à expressão escrita como alternativa descritiva do seu raciocínio.

Apesar da aparente complexidade da definição de Heine, pelo menos para alguns alunos da turma, foi possível detetar alguma evolução positiva na forma de interpretar o conceito de limite de uma função. Por exemplo, um dos grupos de trabalho parece ter começado por identificar o limite com um intervalo real, ou pelo menos usou o intervalo para ilustrar a evolução da função/sucessão para o seu limite (Figura 5-3):

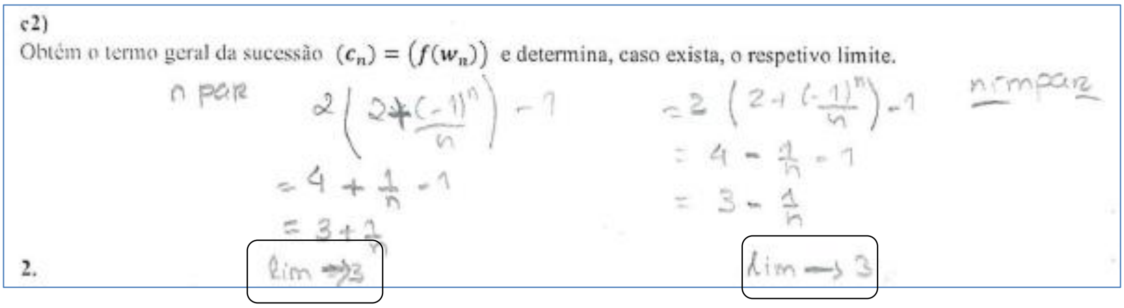

a2)
Obtém o termo geral da sucessão $(a_n) = (f(u_n))$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

$a_n = 2\times\left(2+\frac{1}{n}\right)-1 = 4+\frac{1}{2n}-1 = 3+\frac{1}{2n} \to$ infinitési

$]3, 3.5]$

Figura 5-3: Resolução do exercício 1.a2) da Ficha de Trabalho nº 1 (Fernando e António)

Outro grupo (Mariana/Catarina) considerou que 'o limite tende…', ou seja, usa de forma errada os símbolos '→' e 'lim', não entendendo que o 'limite' é o resultado (eventual) a que se chega quando se analisa a 'tendência' de uma função ou sucessão (Figura 5-4):


c2)
Obtém o termo geral da sucessão $(c_n) = (f(w_n))$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

n par

$2\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1$

$= 4+\frac{1}{n}-1$

$= 3+\frac{1}{n}$

$\boxed{\lim \to 3}$

n ímpar

$= 2\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1$

$= 4-\frac{1}{n}-1$

$= 3-\frac{1}{n}$

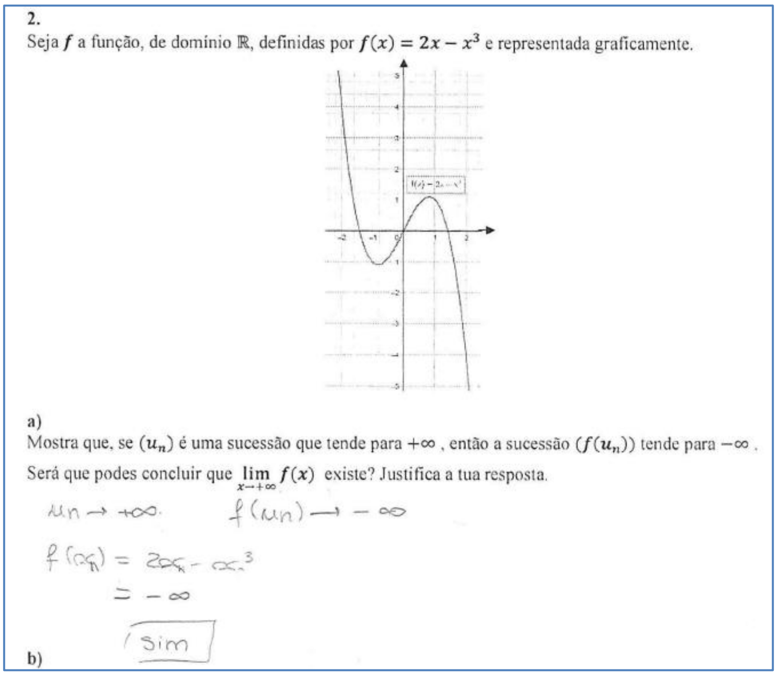
$\boxed{\lim \to 3}$

2.

Figura 5-4: Resolução do exercício 1.c2) da Ficha de Trabalho nº 1 (Mariana e Catarina)

Apenas como curiosidade, é de fazer notar que ambos os grupos não aplicaram corretamente a propriedade distributiva, ainda que isso não tenha prejudicado a solução.

Alguns alunos também começam por confundir uma função com o seu limite, usando de forma inadequada o sinal de igualdade entre ambos, provavelmente traduzindo uma deficiente consolidação prévia da definição do que é uma função. Veja-se por exemplo a resolução seguinte de um dos grupos de trabalho (Figura 5-5):



2.
Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x - x^3$ e representada graficamente.

a)
Mostra que, se (u_n) é uma sucessão que tende para $+\infty$, então a sucessão $(f(u_n))$ tende para $-\infty$.
Será que podes concluir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe? Justifica a tua resposta.

$u_n \to +\infty$. $\quad f(u_n) \to -\infty$

$f(x_n) = 2x_n - x_n^3$
$= -\infty$

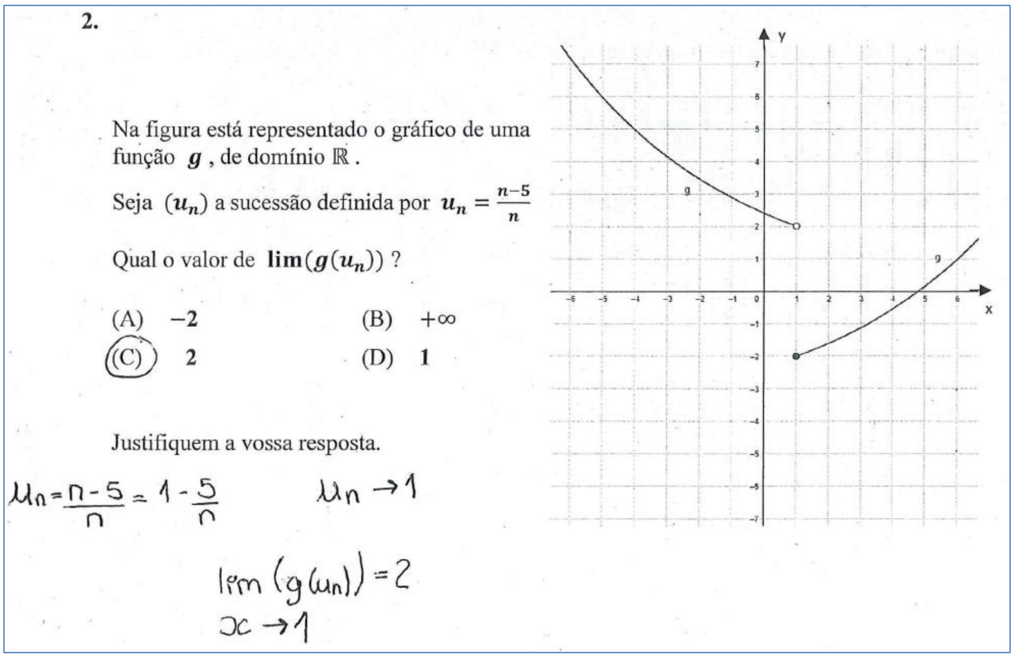
Sim

b)

Figura 5-5: Resolução da tarefa 2.a), Ficha de Trabalho nº 4 (Mariana, Catarina e António)

Ainda que, mesmo depois de alertados, os alunos repitam frequentemente uma notação inadequada, considero que equívocos como os três acima descritos foram relativamente pontuais e ultrapassados com o decorrer das aulas e sucessiva aplicação do conceito de limite.

Há também alunos que manifestam alguma confusão entre os conceitos de limite de uma sucessão e de uma função. Eis um exemplo na questão 2 do miniteste realizado no final das seis aulas, resolvida pelo grupo constituído pelas alunas Margarida e Carolina (Figura 5-6):



2.

Na figura está representado o gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$.

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{n-5}{n}$

Qual o valor de $\lim(g(u_n))$?

(A) -2 (B) $+\infty$

(C) 2 (D) 1

Justifiquem a vossa resposta.

$u_n = \frac{n-5}{n} = 1 - \frac{5}{n}$ $u_n \to 1$

$\lim\limits_{x \to 1} (g(u_n)) = 2$

Figura 5-6: Miniteste de avaliação sumativa, pergunta 2 (Margarida e Carolina)

Repare-se que a notação usada na última igualdade combina limites de sucessões com limites de funções. Por definição, numa sucessão, o domínio é constituído, implicitamente, pelo conjunto dos números naturais. Além disso, o limite de uma sucessão é sempre considerado quando 'n tende para $+\infty$' .Daí não ser necessária essa indicação na notação de limites de sucessões. Ao contrário, nas funções é indispensável indicar o ponto (abcissa) em que o limite está a ser considerado. Muitos alunos tardaram a interiorizar que a imagem (pela função) da sucessão objeto é também uma sucessão, sentindo-se por isso compelidos a aplicar-lhe a notação reservada ao limite de funções.

Outros aspetos revelaram-se mais resilientes, como foi o caso da dificuldade dos alunos em abordar o limite em pontos aderentes não pertencentes ao domínio da função, ou em aceitar 'naturalmente' que a sucessão constante é convergente e o papel dessa constatação na existência de limite de funções um pouco mais complexas.

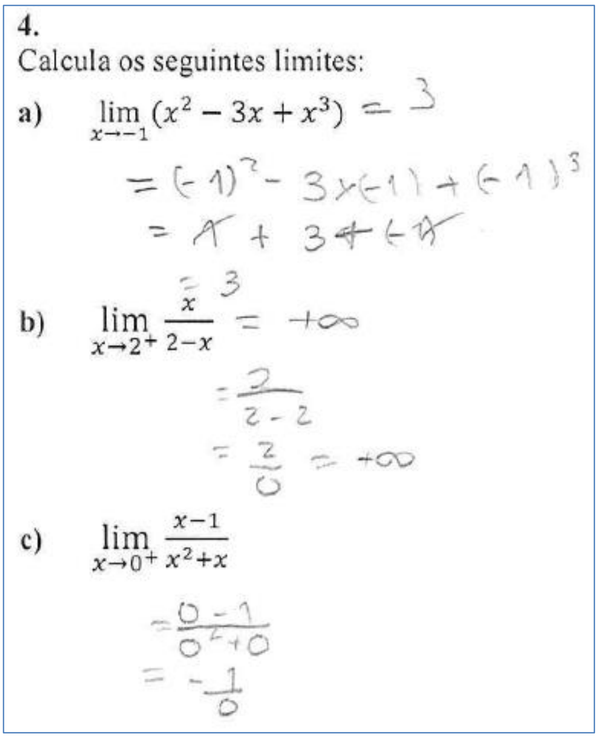
Repare-se neste caso em que um aluno se recusa a aceitar a possibilidade de existência de limite num ponto em que a função não está definida. Como não é possível avaliar a função no ponto, considera-se não fazer sentido considerar a hipótese de existir limite da função nesse ponto (Mário/Pedro/Margarida, exercício 3, Ficha de Trabalho nº 3, ver Anexo 3.3).

Mário: Como é que isso se faz?
Pedro: Não faço ideia.
Mário: Margarida, ajuda aí…

Margarida: Hum ?...É, tipo, eu sei porque é que é mas não sei explicar. Porque se substituíres aqui por zero e substituíres aqui por zero, isso aí não podes mas… se substituíres, dá valores diferentes e aqui é a mesma cena.
…
Mário: Então mas não deveria ser para valores diferentes de zero?... Acho que a Margarida está mais em dizer que não.
…
Mário: O…estava a dizer para substituíres, não é? O 'x' por zero.
Pedro: Não dá… Porque aqui é menor e aqui é maior, logo o zero não faz parte, não há um limite em zero. Aqui é igual, e agora como… me está a dar, não estou a entender…
Margarida: Porquê?
Pedro: Como é que eu faço, afinal?
Margarida: Então fazes o limite do f, o limite de g. Eu vou…
Pedro: Não há limite, nenhuma delas tem limite.
Margarida: Hã?
Pedro: Nenhuma delas tem limite quando o $'x'$ tende para zero. O zero não faz parte das funções.
Margarida: Então, não faz parte mas há um…
Pedro: Não podes substituir
Margarida: Mas ele tem…Está bem, mas se substituíres por um valor perto de zero?
Pedro: Mas isso não é um limite, Margarida.
…

Ambas as funções, f e g, não estavam definidas no ponto de abcissa zero, pelo que o Pedro concluiu que nem fazia sentido calcular o limite nesse ponto. A Margarida ainda insistiu que, para o cálculo do limite, só interessava 'aproximar de zero' mas, mesmo assim, o Pedro manteve-se irredutível.

Este entendimento do limite como sendo obrigatoriamente um valor tomado pela função, resulta em boa medida de essa ser efetivamente a regra nos pontos em que a função é contínua. Para essas funções é comum os alunos dizerem que 'basta substituir' e de facto assim é. Mas as dificuldades surgem quando, como no caso acima, a função não está definida no ponto em que se pretende calcular o limite, apesar deste ser aderente ao domínio (veja-se, na Figura 5-7, a resolução do grupo Mariana/Catarina/António, relativo ao exercício 4.b da Ficha de Trabalho nº 4):



4.
Calcula os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + x^3) = 3$

$= (-1)^2 - 3\times(-1) + (-1)^3$

$= \cancel{1} + 3 + \cancel{(-1)}$

$= 3$

b) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{2-x} = +\infty$

$= \frac{2}{2-2}$

$= \frac{2}{0} = +\infty$

c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2+x}$

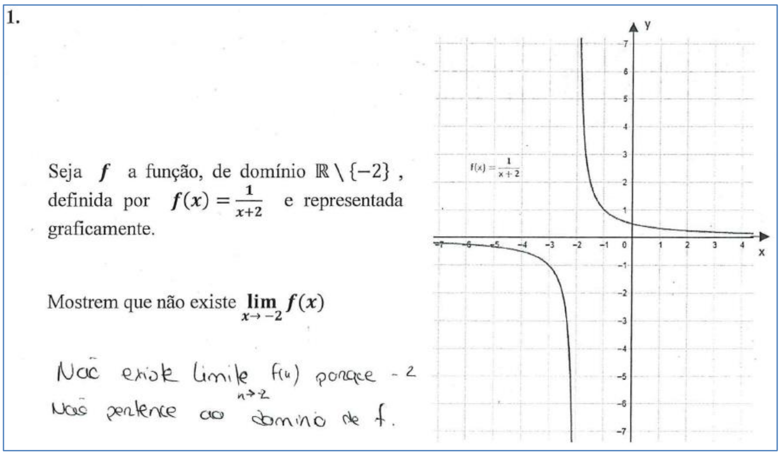
$= \frac{0-1}{0^2+0}$

$= -\frac{1}{0}$

Figura 5-7: Ficha de Trabalho nº 4, resolução do grupo Mariana/Catarina/António para os exercícios da secção 4

Não se denota qualquer dificuldade na alínea a). Já nas alíneas seguintes, os alunos são muito pouco claros na abordagem dos limites laterais, uma vez que não podem calcular o valor da função no ponto solicitado. Ou seja, neste último caso, a regra 'é só substituir' não funciona.

Alguns alunos explicitaram nas suas resoluções o mesmo argumento referido acima pelo Pedro (caso da Beatriz e Leonor, na exploração da questão colocada no exercício 1 do miniteste submetido à turma no final da sexta aula, ver Figura 5-8):



1.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x+2}$ e representada graficamente.

Mostrem que não existe $\lim_{x \to -2} f(x)$

Não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ porque -2 não pertence ao domínio de f.

Figura 5-8: Miniteste de avaliação sumativa, primeira questão (Beatriz e Leonor)

O grupo constituído pelo Marco e Nuno foi ainda mais explícito na sua conclusão, referindo a impossibilidade de numa divisão o divisor poder ser zero (Figura 5-9):

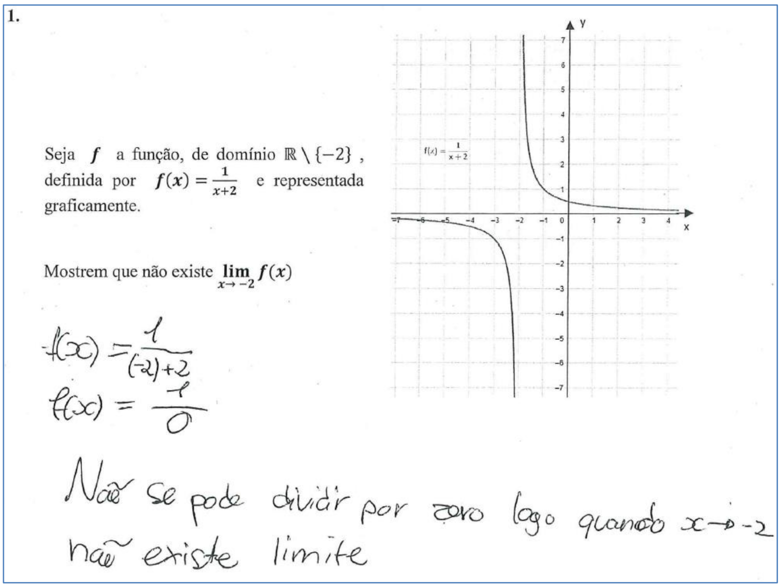


Figura 5-9: Miniteste de avaliação sumativa, primeira questão (Marco e Nuno)

Também o papel da sucessão constante na verificação da existência de limite (segundo Heine) de algumas funções descontínuas, não foi imediatamente apreendido por muitos alunos. Observe-se como o aluno que apresentou no quadro a sua resolução do exercício 4 da Ficha de Trabalho nº 2, demonstrou extrema dificuldade em reconhecer que a única sucessão (tendente para 2, ver Anexo 2.4), de termos no domínio da função, que não verificava a tese era precisamente a sucessão constante. O aluno intuiu corretamente a solução, mas não conseguia justificá-la de forma clara e adequada, mesmo quando questionado diretamente pelo professor (última fala do professor):

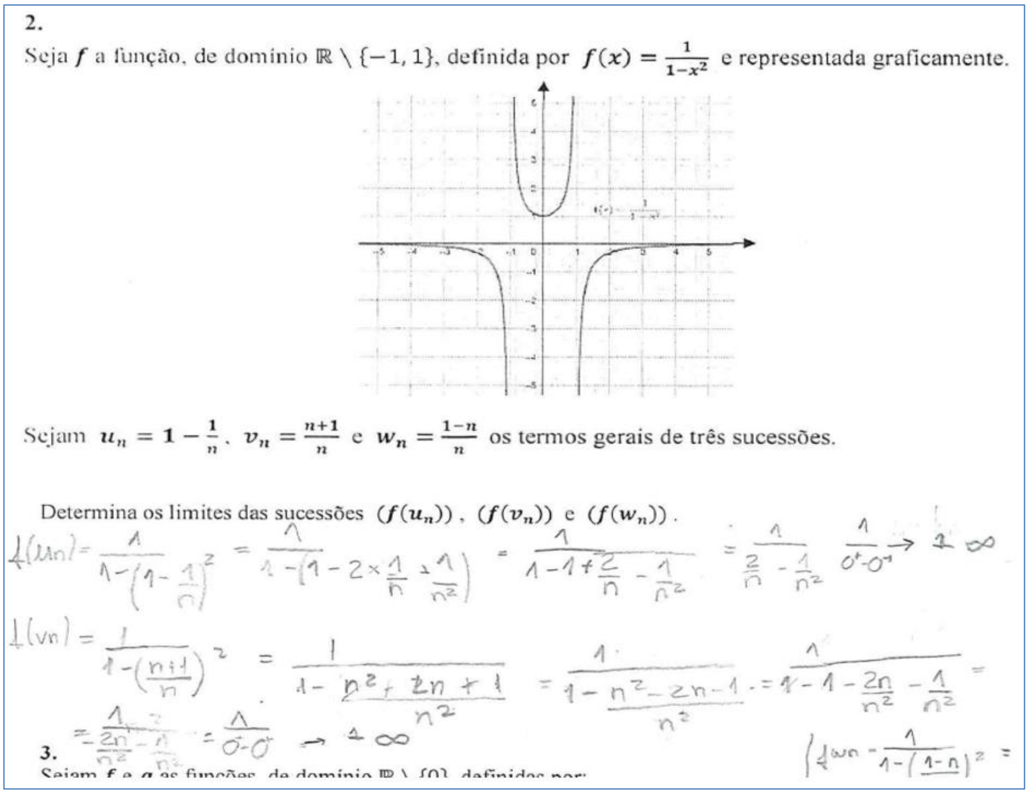
> **Professor**: Qualquer que seja a sucessão que tenda para dois, as suas imagens tendem para zero. É verdade?
> **Pedro**: Eu acho que não porque no dois ela é três, então… Se nós não considerarmos o dois ela está realmente a tender para zero, mas no dois ela é três.
> **Professor**: Qual é essa sucessão? Há uma sucessão que não verifica, qual é?
> **Pedro**: É o… quando é 2.
> **Professor**: Escreve lá aí, qual é a sucessão que não verifica.
> **Pedro**: Não compreendo…

Os dados recolhidos confirmam o que foi uma constante observação durante as seis aulas: os alunos preferem a operatória de limites às tarefas que solicitam o domínio e manuseamento do conceito de limite.

É no entanto curioso que muitos alunos resistam a aplicar a álgebra de limites de sucessões, já apresentada no módulo anterior, e insistam, pelo menos numa fase inicial, em resolver os exercícios por substituição da expressão da sucessão na expressão da função. Trata-se de um bom exemplo em como, variando o contexto, os alunos parecem perder habilidades que já tinham adquirido e aplicado anteriormente, algumas de forma relativamente proficiente.

Neste aspeto considero que um dos objetivos do recurso à definição de Heine, utilizar o conceito de limite de sucessões já anteriormente trabalhado, acaba por não ser plenamente atingido. Efetivamente, os alunos tendem a não valorizar o recurso às sucessões na definição de Heine e a abordar o limite de uma função como um conceito completamente distinto e independente do que tinham aprendido no tópico imediatamente anterior.

Veja-se este exemplo (Figura 5-10) relativo à resolução do exercício 2, Ficha de Trabalho nº 3, efetuada pela Margarida e Carolina (todos os grupos que procuraram resolver o exercício seguiram a mesma estratégia):


2.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ e representada graficamente.

Sejam $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{n+1}{n}$ e $w_n = \frac{1-n}{n}$ os termos gerais de três sucessões.

Determina os limites das sucessões $(f(u_n))$, $(f(v_n))$ e $(f(w_n))$.

$f(u_n) = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(1-2\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1-1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} \quad \frac{1}{0^+-0^+} \to +\infty$

$f(v_n) = \frac{1}{1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1-\frac{n^2+2n+1}{n^2}} = \frac{1}{1-\frac{n^2-2n-1}{n^2}} = \frac{1}{1-1-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{0-0} \to +\infty$

3.

$f(w_n) = \frac{1}{1-\left(\frac{1-n}{n}\right)^2} =$

Figura 5-10: Questão 2 da Ficha de Trabalho nº 3 (resolução de Margarida e Carolina)

O ponto a relevar não é a correção da resolução, mas a estratégia seguida pelos alunos. Dado que a maioria dos alunos revela dificuldades na manipulação de expressões algébricas, seria preferível (para além de muito mais eficiente) que substituíssem na expressão da função o termo genérico da sucessão, cujo limite é conhecido, em vez de o fazerem para a própria expressão definidora da sucessão (como se o limite desta fosse desconhecido e tivesse de ser calculado). Ou seja, como já foi referido, o aluno parece não reconhecer a vantagem, neste tipo de exercícios, de aplicar diretamente o que aprendeu no capítulo das sucessões. Alertei a turma para esta questão da melhor abordagem a cada tarefa, aplicando os conhecimentos já adquiridos, mas fiquei com a impressão de não ter sido totalmente bem-sucedido.

Um ponto que merece relevância é a importância da representação gráfica (quer desenhada, quer por computação) na abordagem do conceito de limite. O desempenho dos alunos foi sempre mais satisfatório nos casos em que a tarefa incluía apoio gráfico (ou nos casos, mais raros, em que os próprios alunos tentaram simular o limite na calculadora).

Se bem que tenha notado a vantagem da presença de gráficos, mantém-se a dificuldade em justificar as conclusões resultantes da leitura gráfica em termos analíticos. Ou seja, o aluno percebeu, mas não consegue traduzir a solução no papel, seja recorrendo à notação matemática, seja socorrendo-se da linguagem comum.

Relativamente à vantagem de a presença de gráficos suscitar a atenção, interesse e discussão dos alunos, veja-se este diálogo a propósito do problema 2 da Ficha de Trabalho nº 4 (ver Anexo 4.2). Nos exercícios puramente analíticos, não é comum existir tanta interação e interesse dos alunos em discutir entre si a forma de abordar a tarefa com que são confrontados:

António: Esta função dá a entender que não passa de três.
Mariana: Isso continua para baixo.
António: Sim, continua para baixo. Mas dá a entender que, por exemplo, …eu vou traçá-la neste momento….
Mariana: Isso vai até menos infinito.
António: Vai tipo assim e depois para assim…tipo estaca. Está mesmo a ver…
Mariana: Não, eu acho que isso vai continuar…
…

O diálogo é interessante e pertinente para o cálculo do limite que é solicitado. O António, por leitura muito simplista e precipitada do gráfico, afirma que lhe parece que a função tem uma assíntota vertical (no ponto de abcissa 3). A Mariana corrige-o, provavelmente porque completou o exame gráfico com a observação da expressão analítica da função. De facto, tratando-se de uma função polinomial (neste caso de grau 3), não apresenta qualquer assíntota.

Noutros casos o gráfico parece ter sido decisivo para a solução, mas a expressão analítica desta é completamente dissonante (Figura 5-11, resolução do grupo constituído por João e Fernando, para a questão 1 do miniteste):

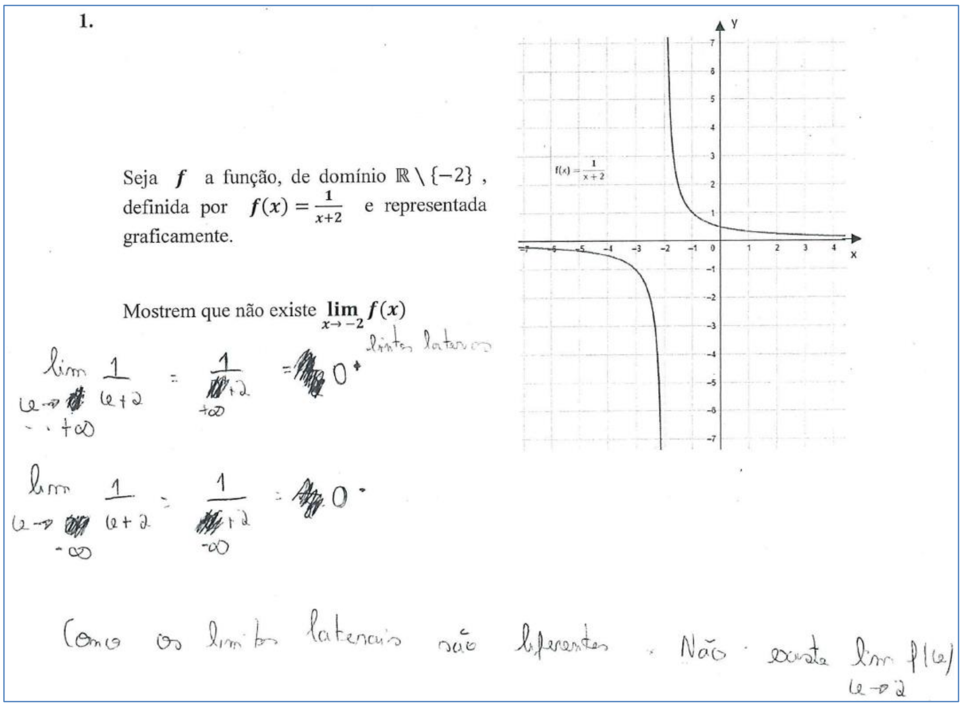


Figura 5-11: Miniteste de avaliação, questão 1 (grupo de trabalho: João e Fernando)

Aparentemente, os alunos trocaram o eixo dos 'xx' pelo eixo dos 'yy' na justificação analítica da sua demonstração (a abcissa tende para -2; a ordenada, ou seja, a função, é que tende para infinito).

Em termos genéricos, não se observou mudança significativa no conceito de limite exibido pelos diferentes alunos da turma. Alguns dos alunos já conheciam o conceito de anos anteriores e, mesmo nesses casos, verificou-se uma certa cristalização na forma de abordar quer o limite de sucessões quer de funções.

O facto de a noção de limite ser apresentada segundo a definição de Heine, isto é, apelando ao uso de sucessões, faz privilegiar uma conceção dinâmica de limite, como contraposição à perspetiva mais estática subjacente à definição de Cauchy. Isso está também patente nos testemunhos recolhidos da atividade dos alunos, pois todos eles, sem exceção, associaram a ideia de limite ao 'movimento' ou 'aproximação' na direção de um objetivo alvo (e daí expressões como 'tende para...' ou 'cada vez mais próximo de…'), em vez da perspetiva de Cauchy de 'aprisionamento' dos valores da função num intervalo centrado no valor limite (a que tecnicamente chamamos vizinhança). Apesar de ter apresentado à turma a definição de ponto aderente na representação de Cauchy (como alternativa à aceção alinhada com a definição de limite de Heine), não constituiu surpresa que nenhum aluno tenha mostrado curiosidade em explorar essa outra forma de encarar o conceito de limite (Figura 5-12).

Definição de ponto aderente a um subconjunto de $\mathbb{R}$:

Seja **A** um subconjunto de $\mathbb{R}$ e seja $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Diz-se que ***a* é ponto aderente a A** se existir uma sucessão de elementos de **A** convergente para $\boldsymbol{a}$.

Também se designa por **aderência de A** o conjunto dos pontos aderentes a **A**.

(ver página 8, volume 3 do teu manual)

Outra definição possível de ponto aderente, equivalente à anterior:

Definição de ponto aderente a um subconjunto de $\mathbb{R}$:

Seja **A** um subconjunto de $\mathbb{R}$ e seja $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Diz-se que ***a* é ponto aderente a A** se em qualquer **vizinhança de *a*** existir pelo menos um elemento do conjunto **A** .

Recorda a definição de vizinhança $\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$ de um ponto $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[}$

Portanto, $x \in V_\delta(a) \Leftrightarrow x \in]a - \delta, a + \delta[\Leftrightarrow |x - a| < \delta$

Figura 5-12: Na Ficha de Trabalho nº 4 os alunos foram confrontados com uma definição (alternativa) de ponto aderente usando o conceito (já conhecido) de vizinhança

De salientar que ambas as definições acima constam do manual adotado da disciplina.

Conflitos cognitivos inibidores da compreensão do conceito de limite

Foram várias as evidências recolhidas que indiciam possíveis ‘conflitos cognitivos inibidores ou perturbadores da correta apreensão do conceito de limite por parte dos alunos’, uma das questões orientadoras do presente estudo. Começo por salientar informação relevante obtida da entrevista realizada.

Na conversa com o aluno Pedro, após tê-lo confrontado com a dízima infinita 0,(9) e questionado sobre a sua relação de ordem com a unidade, aconteceu o seguinte diálogo:

> **Professor**: Dizes que o número zero vírgula nove, nove, nove, um número infinito de noves, é menor que um. Porquê? Porque é que sentes que é menor que um?
> **Pedro**: porque não é um…
> **Professor**: É menor que um. Ou seja, está abaixo de um?

Pedro: Sim.
Professor: Muito bem. Então agora, estás a ver um terço, não estás?
Pedro: sim.
Professor: que é zero vírgula…
Pedro: …três, três, três,…
Professor: …três, três, três,...Vamos multiplicar este número por três.
Pedro: Sim…
Professor: Quanto é que dá?
Pedro: Dá zero vírgula nove, nove, nove, nove, nove,…
Professor: Ou seja, não é um?
Pedro: Não!
Professor: E um terço vezes três?
Pedro: É um! É três terços.
Professor: Então?
Pedro: Então… boa pergunta…
…
Pedro: Então, mas zero vírgula nove, nove, nove,… é um? Eu acho que não.
Professor: Então deixa-me dizer-te uma coisa. Vamos agora pensar nos limites.
Pedro: Hum…
Professor: Vamos supor que isto era uma sucessão…
Pedro: Hum, hum…
Professor: …em que o primeiro termo é zero vírgula nove. O segundo termo é zero vírgula nove, nove. O terceiro termo é zero vírgula nove, nove, nove. Ou seja, o índice do termo geral da sucessão representa o número de noves existentes no termo.
Pedro: Hum, hum…
Professor: Então qual é o limite de zero vírgula nove quando o número de noves tende para mais infinito?
Pedro: Um!
Professor: Este limite é igual a um.
Pedro: Um, está bem.

Da leitura deste extrato da entrevista, pode afirmar-se que o aluno começou por ser perentório em avaliar a dízima como sendo inferior à unidade. A seguir, confrontado com o facto de a mesma dízima ser o triplo de 0,(3) ou um terço, já se mostrou muito menos seguro em justificar porque não poderia ser a própria unidade. Ou seja, o diálogo revela um conflito ou contradição entre uma convicção ou conceção espontânea do aluno (a dízima dada ser inferior a um) e o resultado inesperado a que é conduzido através do raciocínio dedutivo a partir da dízima 0,(3), a qual lhe é tão familiar que não tem dificuldade em igualá-la a um terço.

Em seguida, o Pedro acaba por concordar que algo está errado numa das conclusões, mas continua a resistir em admitir que 0,(9) possa ser exatamente a unidade. É neste ponto que o professor propõe recorrer ao conceito de limite (no caso, de uma sucessão) para tentar que o aluno identifique e desmonte o conflito cognitivo (de natureza epistemológica) que o está a impedir de perceber a origem da contradição e de a ultrapassar. No final, aparentemente, o aluno aceita que a dízima proposta seja a própria unidade, o que não significa que o conflito tenha sido definitivamente ultrapassado. É muito provável que, colocado perante um desafio com a mesma tipologia, em contexto diferente, o conflito entre conceito-imagem e conceito-definição emirja novamente.

Evidencia-se a dificuldade do Pedro em operacionalizar a situação descrita na forma de definição do conceito de limite (no caso, o de limite de uma sucessão). Foi o professor quem modelou o problema, efetuando a correspondência entre cada dízima finita e o termo de uma sucessão de números reais. Também é patente, no decurso do diálogo, que foi precisamente esta modelação que despertou o aluno para a relação da questão colocada com o que tinha aprendido em termos teóricos. Ou seja, foi fundamentalmente a partir daqui que a argumentação do professor começou a 'fazer sentido' para o aluno.

A entrevista à Mariana consistiu nas mesmas perguntas e as respostas foram globalmente semelhantes às do Pedro. No entanto houve uma diferença importante: a Mariana aceitou a igualdade $0,(9) = 1$ sem necessidade de modelar a situação com uma sucessão (como sucedeu com o Pedro).

A aluna começa por concordar que a dízima 0,(3) só é um terço porque o número de algarismos três não é finito, ou seja, se houver um 'último 3' o valor da dízima é inferior a um terço:

> **Professor**: Como representarias um terço por uma dízima, um número decimal?
> **Mariana**: Zero vírgula três…
> **Professor**: Zero vírgula três mesmo?
> **Mariana**: Três, três, três,…
> **Professor**: Quantos três?
> **Mariana**: Infinitos.
> **Professor**: Infinitos. Então um terço é zero vírgula três um número infinito de três.
> **Mariana**: Sim.
> **Professor**: E se pararmos, ou seja, se eu puser um milhão de três, zero vírgula um milhão de três e parar, continua a ser um terço?
> **Mariana**: Não!
> **Professor**: É mais ou menos que um terço?
> **Mariana**: É menos.
> **Professor**: É menos do que um terço. Estamos de acordo. Então agora vou dar-te outro número. Que é este: zero vírgula nove, nove, nove, um número infinito de noves. Está bem?
> **Mariana**: Hum, hum…

Professor: É zero vírgula nove, um número infinito de noves. Não para.
Mariana: Sim.
Professor: Pergunto: este número, para ti, é menor que um, maior que um ou igual a um?
Mariana: …É menor que um.
Professor: É menor que um. E porque é que este número para ti é menor que um?
…
Mariana: Então, porque zero vírgula nove, nove, nove, nunca chega a um.
Professor: Nunca chega a um. Muito bem. Então vamos voltar outra vez a um terço. Se eu tiver zero vírgula três, três, três, três, três, três, … ponho aqui entre parêntesis para dizer que é uma infinidade de três.
Mariana: Sim.
Professor: Nunca para. Este número é igual a um terço.
Mariana: Sim.
Professor: É! Então multiplica lá este número por três. Quanto é que dá zero vírgula três, três, três, três, três, três,… vezes três?

Curiosamente, a Mariana não aplica à dízima 0,(9) o mesmo critério que considerou claro para a dízima 0,(3). Para ela, parar ou não parar na escrita do algarismo nove é indiferente, o resultado será sempre menor que a unidade. Segue-se o diálogo que permitirá evidenciar a contradição contida nas afirmações até agora sustentadas pela aluna:

Mariana: …hum…zero vírgula…nove, nove,…
Professor: Quantos noves?
Mariana: Infinitos.
Professor: Pronto. Então se tiveres zero vírgula três, três, três,… infinitas vezes, multiplicado por três dá zero vírgula nove, nove, nove,…infinitas vezes?
Mariana: Hum, hum.
Professor: Estou de acordo. Então agora pergunto: e quanto é que é um terço vezes três?
Mariana: …um terço vezes três…é um!
Professor: Não tens dúvidas?
Mariana: Não!
Professor: Então quanto é zero vírgula três, três, três, três, três, infinitas vezes, multiplicado por três?
Mariana: …então… não é zero vírgula nove, nove, nove,…?
Professor: É! Então vamos ver. Tu disseste-me que um terço vezes três é igual a…
Mariana: Um!

Finalmente, a aluna percebe que não pode deixar de concluir que a dízima proposta só pode ser a unidade, uma vez considera evidente que 0,(3) é mesmo um terço:

Professor: …Um! Em vez de um terço eu posso por zero vírgula três, três, três, infinitas vezes.

Mariana: Hum.
Professor: Isto é um terço.
Mariana: Sim.
Professor: Isto vezes três é igual a…
Mariana: um.
Professor: …ou…?
Mariana: …zero vírgula nove, nove, nove,…
Professor: Zero vírgula nove, nove, nove,…Então, zero vírgula nove, nove, nove,… tem de ser igual a…
Mariana: Um!

A Mariana, ao invés do Pedro, aceitou a igualdade sem necessidade de modelar (explicitamente) a situação e recorrer ao limite de uma sucessão (embora a aluna também tenha aceite essa alternativa como explicação para a igualdade). Ela percebeu que a analogia com o triplo de um terço era suficiente para entender a contradição contida no seu raciocínio. Não obstante, o diálogo acima evidencia outra dificuldade de tipo epistemológico, talvez a mais notória e frequente na aprendizagem do conceito de limite: a questão do *atingimento efetivo do limite*, por algum termo da sucessão ou valor da função em estudo ("…porque zero vírgula nove, nove, nove,… nunca chega a um.").

Os alunos tendem a lutar contra a 'passagem ao limite', insistindo em que o processo de aproximação, sendo 'imparável', nunca permitirá atingi-lo. Ora é precisamente por ser 'imparável' (pelo menos nas situações mais usuais nos exercícios em sala de aula e apresentados nos manuais) que o limite é alcançado. A Mariana não aceitava que a dízima fosse a unidade porque a mesma 'nunca chega a um'. Mas isto equivale a admitir que a dízima é finita, ou seja, que o número de noves é um número natural. Para além de denotar uma deficiente aprendizagem do conceito de limite, esta postura mental da Mariana (e que o Pedro também evidenciou, embora de forma menos explícita) demonstra que o aluno tende por vezes a considerar o limite como um termo da própria sucessão, em vez de o considerar uma entidade independente (da sucessão) embora esteja com ela relacionado. Nem a Mariana nem o Pedro perceberam que a dízima era o próprio limite, nada obrigando a que o mesmo (a unidade) tivesse de igualar qualquer termo da sucessão (isto é, zero vírgula, seguido de qualquer número finito de noves).

Esta situação é tanto mais surpreendente quanto os alunos se inclinam muitas vezes, como por exemplo se observou num dos diálogos transcritos com a Mariana, a considerar o limite como um valor nunca atingido (pela sucessão ou pela função, conforme os casos). O que talvez explique aliás a dificuldade de tantos alunos em identificar as sucessões/funções constantes como obviamente convergentes. O caso apresentado na entrevista representa, nesta perspetiva, o cenário mais frequente nos exercícios de aplicação do conceito de limite. Mas nenhum dos alunos conseguiu identificar imediatamente a unidade (ou a dízima infinita) como o limite 'habitual, nunca atingido' de uma sucessão (neste caso de dízimas finitas).

A Mariana admitia a premissa de que a dízima apresentava um número infinito de noves, mas logo o esquecia quando convidada a operacionalizar essa assunção respondendo à pergunta da comparação com a unidade. Na sua mente, todas as comparações envolviam termos da sucessão em vez do respetivo limite, pelo que a resposta não poderia ser diferente da que apresentou. Efetivamente, desse ponto de vista, o limite, quer dizer o valor um, nunca seria atingido.

O tema do atingimento ou não atingimento do limite parece adquirir assim, na perspetiva dos alunos, uma enorme relevância na aprendizagem do conceito, quando de facto nada tem de essencial. Pelo contrário. O que caracteriza o limite é o ´processo de aproximação', não a questão do atingimento. Aliás, sucessão e respetivo limite (se existir) são entidades distintas, ainda que evidentemente relacionadas. Neste sentido, este diálogo exemplifica também um conflito ou obstáculo cognitivo de natureza didática.

Foi pois mais fácil desconstruir o conflito cognitivo no caso da Mariana, em comparação com o Pedro. A mesma estratégia aplicada ao Pedro não resultou. Ele continuou a duvidar que 0,(9) pudesse ser um. Foi a modelação do problema com recurso ao conceito de limite que o fez concordar que, se 0,(9) se pode aproximar tanto quanto se queira de um, então não se pode distinguir da unidade.

Sobre a perceção do grau de dificuldade do conceito de limite, a opinião do Pedro tem especial interesse porque acrescenta a questão da aplicabilidade.

> **Professor**: Vamos então aos limites. Achaste os limites uma matéria complicada?
> **Pedro**: Eu acho os limites uma matéria relativamente fácil de perceber…
> **Professor**: Hum…
> **Pedro**: … Acho que é mais difícil de perceber para que é que serve. Mas os limites em si, eu acho que é relativamente fácil.
> **Professor**: Portanto a tua principal questão é em relação à utilidade, a matéria até nem te pareceu difícil…
> **Pedro**: Sim.
> **Professor**: …Mas para que é que isto serve?
> **Pedro**: Exato!

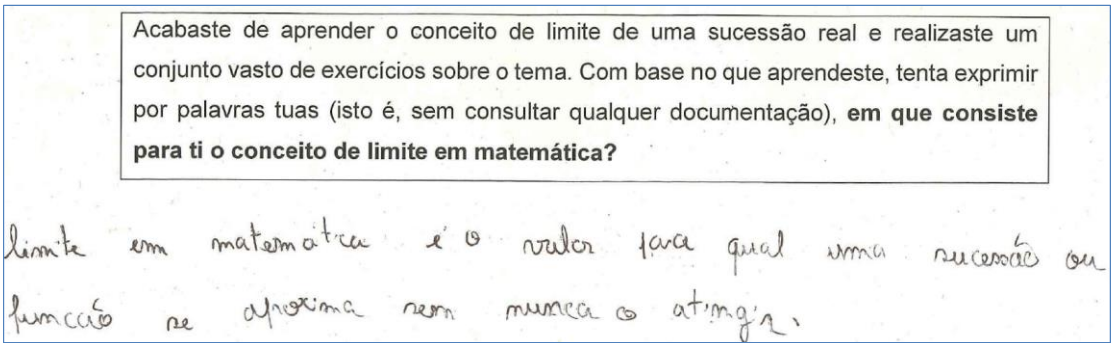
> **Professor**: OK. Muito bem. Continuas com essa dúvida, ou seja, agora que já usaste os limites noutras áreas, não está ainda claro para ti para que é que os limites servem.
> **Pedro**: Não, continua sem estar… claro.

Neste excerto está patente um obstáculo de natureza epistemológica, concretamente os *aspetos metafísicos da noção de limite*, uma das categorias apresentadas por Cornu (2002). Durante a entrevista, apesar de saber que o tema seria relacionado com as aulas lecionadas, o aluno nunca denotou que a chave do problema com que foi confrontado poderia residir precisamente na noção de limite.

Esta postura do Pedro relativamente à não aplicabilidade de certos tópicos matemáticos ("…acho que é mais difícil de perceber para que é que serve."), não se manifesta apenas no conceito de limite, sendo transversal a outros temas do currículo da disciplina no ensino secundário.

Os dados recolhidos revelaram outro aspeto importante de alguns conflitos cognitivos em matemática: *a sua resiliência*. Os alunos foram convidados a responder a uma questão sobre a sua conceção de limite, antes e depois das seis aulas lecionadas sobre limites de funções reais de variável real (já conheciam o conceito aplicado a sucessões, matéria que precedeu o limite de funções). O objetivo era identificar possíveis alterações no conceito de limite enunciado pelos alunos.

Os resultados foram surpreendentes. Muitos alunos mantiveram o conceito imagem sobre limites que apresentavam no final do domínio sobre sucessões, como se ilustra no exemplo seguinte, relativo às respostas dadas por António e João (Figura 5-13 e Figura 5-14).


Acabaste de aprender o conceito de limite de uma sucessão real e realizaste um conjunto vasto de exercícios sobre o tema. Com base no que aprendeste, tenta exprimir por palavras tuas (isto é, sem consultar qualquer documentação), **em que consiste para ti o conceito de limite em matemática?**

limite em matemática é o valor para qual uma sucessão ou função se aproxima sem nunca o atingir.

Figura 5-13: Resposta de António e João, na primeira aula, antes de iniciar a exploração do conceito de limite de uma função

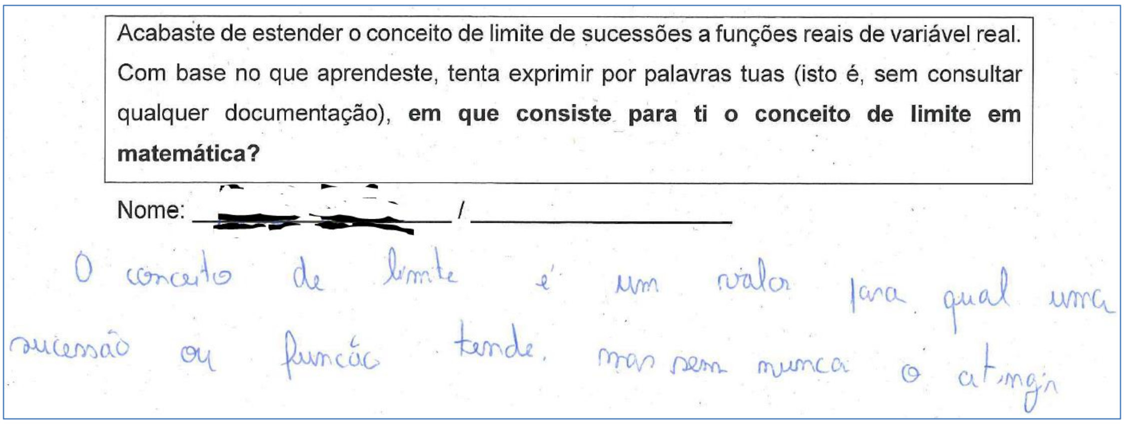


Figura 5-14: Resposta de António e João, a uma questão semelhante, após seis aulas de trabalho com o conceito de limite

Este padrão repetiu-se com outros alunos, ainda que alguns grupos indiquem simplesmente que o limite é "… o/um valor para o qual a função tende". O caso do António e do João é paradigmático, uma vez que se trata de alunos que já tiveram, no ano anterior, contacto com o mesmo tema.

Apesar de ter insistido várias vezes, quer de forma expositiva, quer através de exercícios e exemplos práticos, no facto do conceito de limite não excluir que o mesmo possa ser atingido, muitos alunos mantiveram (ou reassumiram, em contextos distintos) o seu pré-conceito de que o limite é algo que se aproxima mas nunca se alcança. É um caso típico em que a resposta (intuitiva) usa diretamente o conceito-imagem, sem qualquer recurso (ou consulta) ao conceito-definição do objeto (Vinner, 2002).

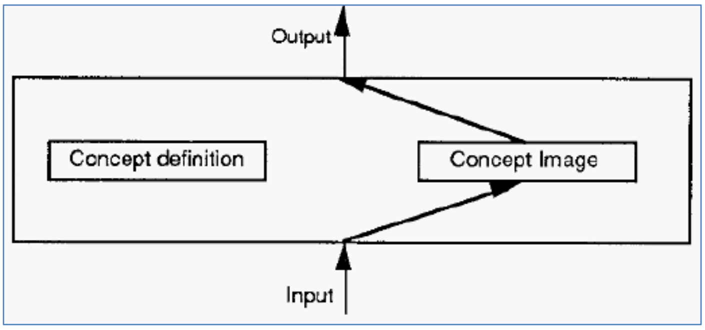


Figura 5-15: Resposta intuitiva, em que se recorre apenas ao conceito-imagem, dispensando a consulta do conceito-definição

A abordagem do conceito de limite constitui ainda, para muitos alunos, uma matéria para a qual não veem qualquer aplicação prática, o que pode explicar, pelo menos em parte, a resistência em recorrer ao limite como ferramenta de auxílio na resolução de problemas do mundo real. Por outro lado, o conceito tem associado questões metafísicas que a didática ainda está a explorar, de modo a facilitar a gestão e ultrapassagem de conflitos cognitivos que dificultam a correta apreensão do conceito pelos alunos.

Mobilização do conceito de limite na resolução de tarefas e principais dificuldades que os alunos evidenciam

A resolução de tarefas implicando o recurso ao conceito de limite envolve normalmente, como sucede aliás quase sempre em matemática, a mobilização de conhecimentos anteriores, especialmente nos domínios da Álgebra e Geometria. As limitações demonstradas pelos alunos tornam-se aqui particularmente gravosas, uma vez que os erros cometidos acabam por comprometer com frequência os objetivos da tarefa, no que à exploração do conceito de limite diz respeito. Ou seja, um exercício que pretendia evidenciar algum aspeto particular do conceito de limite, acaba por exigir muito mais foco e atenção do aluno em tópicos colaterais que, embora indispensáveis à resolução, são apenas instrumentos que lhe permitem atingir o essencial. O trabalho autónomo esgota-se no acessório e o propósito da tarefa perde-se, em boa medida, numa espécie de novelo em que o aluno se vê enredado.

São relativamente abundantes e significativos os exemplos recolhidos sobre as dificuldades com que os alunos se depararam na apreensão e aplicação do conceito de limite. Como veremos, aos obstáculos de natureza mais técnica, acrescem também transtornos provocados por um domínio insuficiente da própria língua portuguesa, não só na leitura e na escrita, como também na oralidade.

Os exemplos mais frequentes refletem dificuldades na simplificação de expressões algébricas ou mesmo aritméticas. Eis algumas evidências (Figura 5-16 e Figura 5-17):

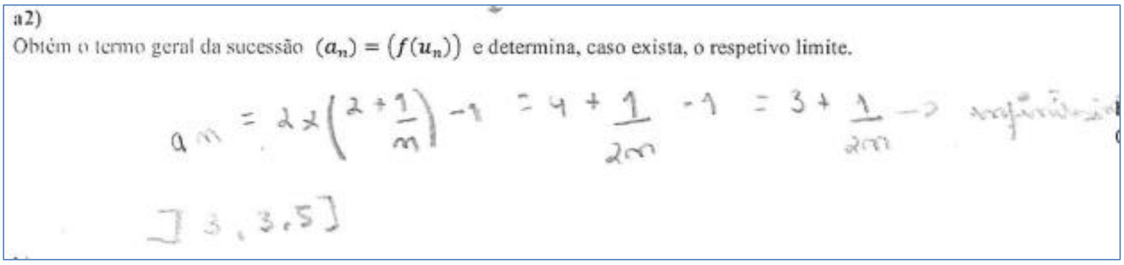
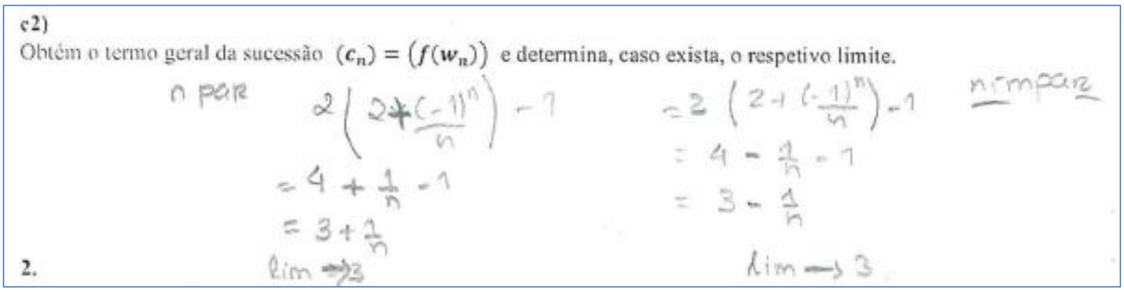


Figura 5-16: Resolução da questão 1.a2) da Ficha de Trabalho nº 1 (Fernando e António)


c2)
Obtém o termo geral da sucessão $(c_n) = (f(w_n))$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

n par
$2\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1$
$= 4+\frac{1}{n}-1$
$= 3+\frac{1}{n}$
lim → 3

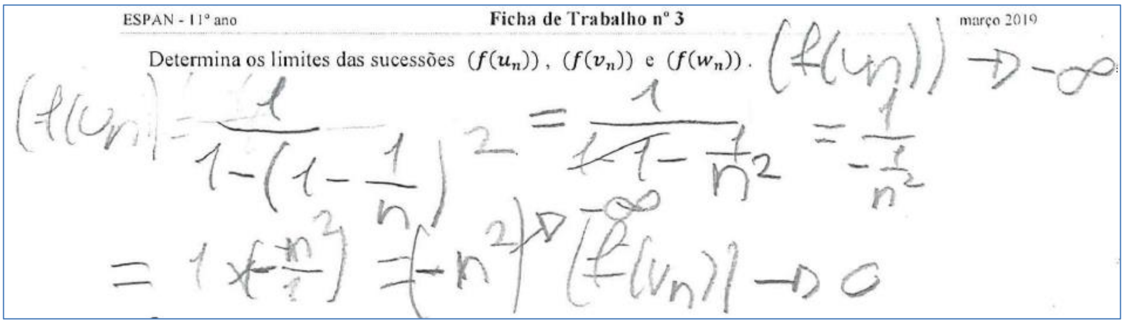
n ímpar
$= 2\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1$
$= 4-\frac{1}{n}-1$
$= 3-\frac{1}{n}$
lim → 3

2.

Figura 5-17: Resolução da questão 1.c2) da Ficha de Trabalho nº 1 (Mariana e Catarina)

Ambas as situações acima se referem a alíneas da questão 1 da Ficha de Trabalho nº 1 (grupos de trabalho Fernando/António e Mariana/Catarina, respetivamente). Os alunos erram a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição e à subtração. No primeiro caso (Figura 5-16) podem também inferir-se dificuldades na manipulação e operação com números fracionários. Por mero acaso, as incorreções não afetam nem a conclusão nem o raciocínio pretendido conducente ao apuramento do limite de cada sucessão.

Outro exemplo, de maior gravidade, agora envolvendo o exercício 2 da Ficha de Trabalho nº 3 (grupo de trabalho Nuno/Marco, ver Figura 5-18), denota não só desconhecimento dos casos notáveis da multiplicação, como também negligência quanto ao papel dos parêntesis nas expressões algébricas e sua consequência no sinal dos termos por eles delimitados.


ESPAN - 11º ano Ficha de Trabalho nº 3 março 2019

Determina os limites das sucessões $(f(u_n))$, $(f(v_n))$ e $(f(w_n))$.

$(f(u_n)) \to -\infty$

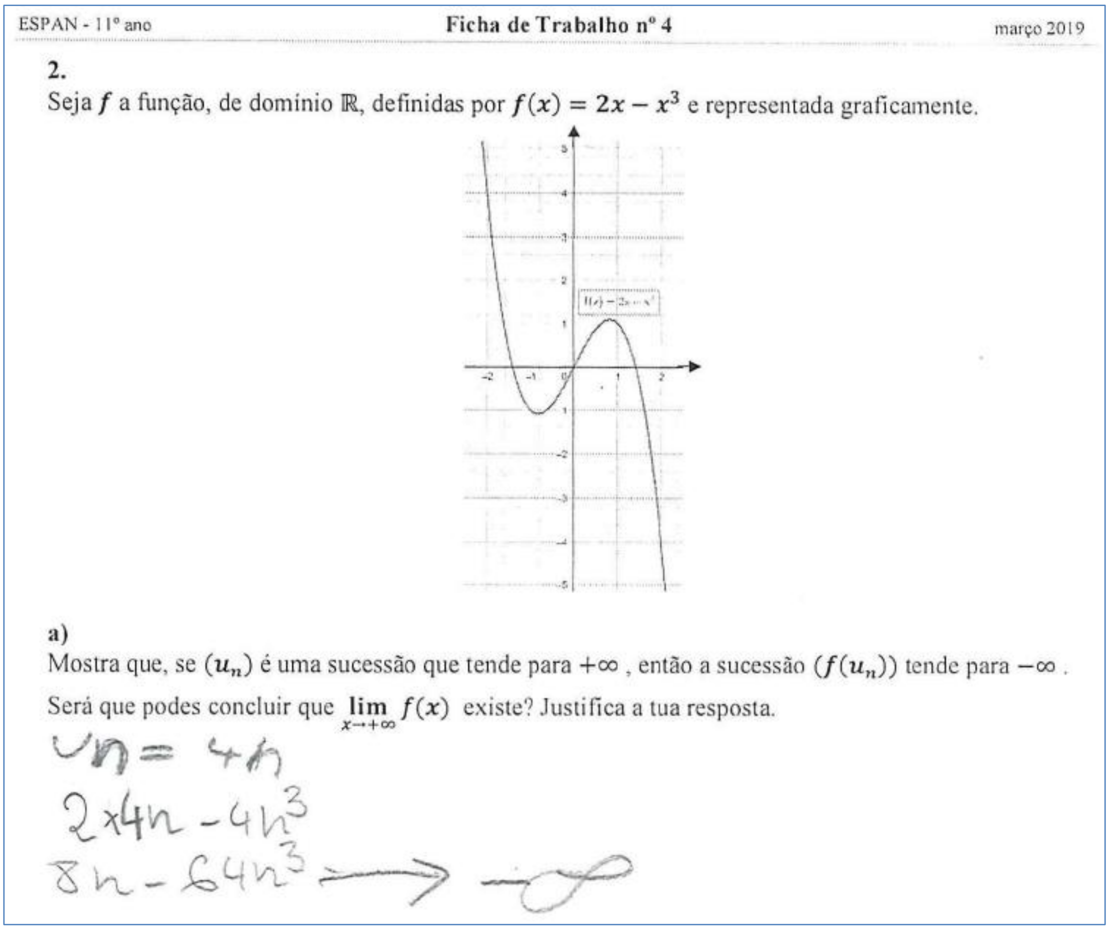
$(f(v_n)) = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1-1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{-\frac{1}{n^2}} = 1 \times \left(-\frac{n^2}{1}\right) = (-n^2) \to -\infty$

$(f(v_n)) \to 0$

Figura 5-18: Ficha de Trabalho nº 3, exercício 2 (grupo de resolução: Nuno e Marco)

Neste caso os erros conduziram a uma conclusão errada quanto ao sinal do limite da sucessão imagem. Acrescente-se que uma observação crítica do gráfico que integrava o enunciado (ver Anexo 3.2), permitiria aos alunos aperceberem-se de que o resultado analítico a que chegaram não estaria correto (ou pelo menos em concordância com o gráfico da função em estudo).

Falhas na interpretação e manuseamento de parêntesis são ainda, infelizmente, bastante frequentes ao nível do ensino secundário. O mesmo grupo de trabalho tornou a não ser claro no uso de parêntesis na resolução da questão 2 da Ficha de Trabalho nº 4 (Figura 5-19):


ESPAN - 11º ano **Ficha de Trabalho nº 4** março 2019

2.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x - x^3$ e representada graficamente.

a)

Mostra que, se (u_n) é uma sucessão que tende para $+\infty$, então a sucessão $(f(u_n))$ tende para $-\infty$.

Será que podes concluir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe? Justifica a tua resposta.

$Vn = 4n$

$2 \times 4n - 4n^3$

$8n - 64n^3 \longrightarrow -\infty$

Figura 5-19: Ficha de Trabalho nº 4, questão 2.a), resolução dos alunos Nuno e Marco

Desta vez os alunos submeteram a função à sucessão objeto $4n$ e simplificaram corretamente a expressão resultante. Mas a notação está errada, por omissão de parêntesis no termo ao cubo. O que é curioso, dado ser mais usual os alunos ignorarem a presença de parêntesis; desta vez assumiram-no implicitamente. Apetece perguntar: como reagiria o aluno se lhe pedissem para simplificar a expressão $4z^3$? Provavelmente responderia, corretamente, que nada há a simplificar.

Mais um exemplo, agora de erro aritmético (tarefa 1.a1, Ficha de Trabalho nº 1, executada pela Mariana e Catarina, ver Figura 5-20). Trata-se muito provavelmente de um lapso fortuito, uma falha de concentração. Mas, dado o contexto da tarefa, ambas as alunas tiveram diversas oportunidades para detetarem e corrigirem o erro, o que não sucedeu. Para além da sucessão $\boldsymbol{u_n = 2 + \frac{1}{n}}$ ser estritamente decrescente e convergir para 2 (assunto já muito rebatido na turma no módulo de limites de sucessões), os alunos eram convidados a marcar pontos no gráfico da função, o que permitiria revelar facilmente a estranha 'inversão' de comportamento entre os termos u_3, $\boldsymbol{u_4}$ e u_5 (Figura 5-20). Para não referir o facto de 9 e 4 não terem fatores primos comuns (são primos entre si) e de as frações presentes na coluna $\boldsymbol{u_n}$ da tabela apontarem para um padrão que quebrava, mais uma vez estranhamente, no termo $\boldsymbol{u_4}$. São muitas pistas (por exemplo, $\frac{9}{4}$ é manifestamente superior a 2, ao contrário de $\frac{3}{2}$), pelo que a não perceção do erro só pode indiciar falta de espírito crítico e uma certa 'mecanização' na resolução da tarefa, não obstante esta ter sido cuidadosamente elaborada para possibilitar aos alunos perceberem, usando diferentes técnicas e recursos, a transição do limite de sucessões para o limite de funções.

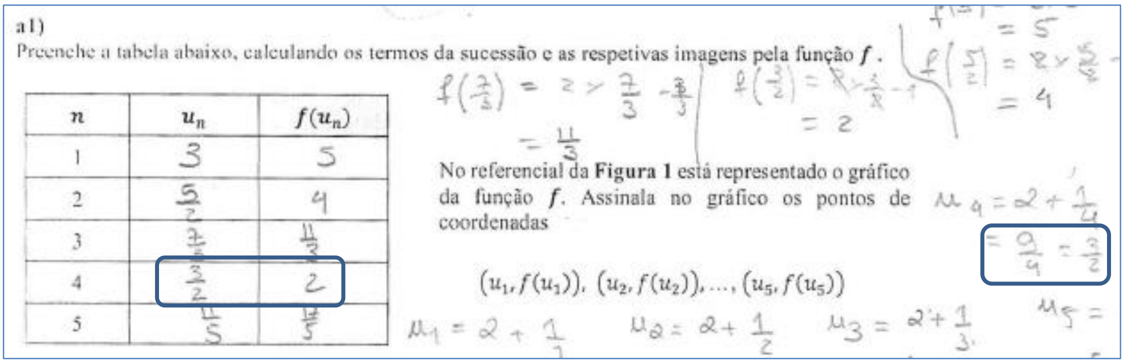


Figura 5-20: Tarefa 1.a1) da Ficha de Trabalho nº 1, resolução de Mariana e Catarina

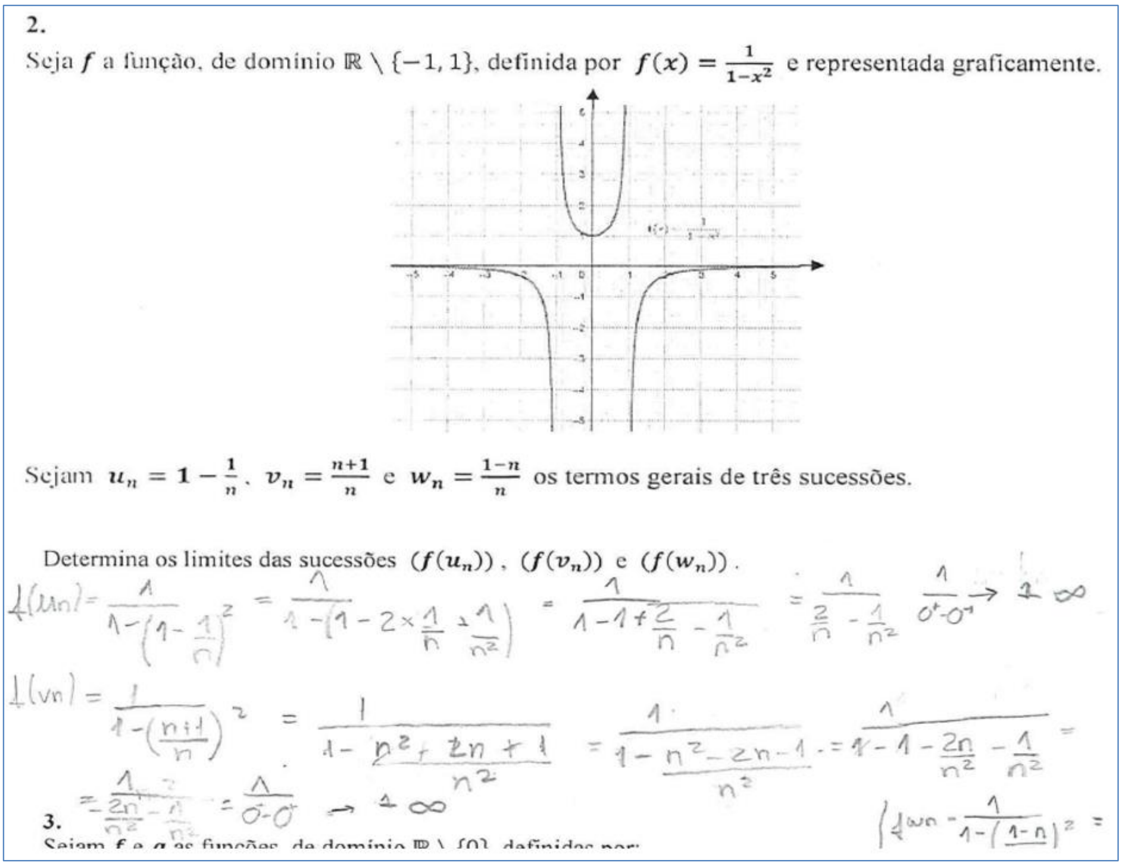
Alguns alunos patenteiam uma noção de função pouco consolidada, o que acaba por se refletir em dificuldades na abordagem do conceito de limite, em particular quando é solicitado o recurso à definição de Heine. Por exemplo, nos primeiros exercícios, a maioria dos alunos não conseguia determinar o termo geral da sucessão imagem a partir da sucessão objeto, aplicando a expressão da função. É também frequente confundirem objeto com imagem, quer na manipulação analítica de uma função, quer na própria representação gráfica (por exemplos não sabendo onde marcar a imagem de x pela função f ou confundindo o ponto, par de coordenadas, com a ordenada/valor da função). Atente-se neste diálogo, ocorrido na sequência do esclarecimento de dúvidas durante a resolução do exercício 4, Ficha de Trabalho nº 3, ver Anexo 3.4 (grupo constituído pelos alunos Fernando, António e João, dois dos quais já tiveram contacto com o tema em ano anterior):

> …
> **João**: Nós metemos em evidência, só que dá-nos isto e depois dá-nos para menos infinito. Não estamos a chegar ao menos dois.

Professor: Porquê? Já percebeste porquê? Então isto é igual a um sobre 'n' menos… menos dois 'n'. Isto tende, para onde?... Isto tende para menos infinito.
João: Sim.
Professor: Qual é o problema?
João: O problema é que tem de tender para…
Professor: Não, não, calma, calma.
João: O problema é que esta tende para dois…
Professor: Sim, mas espera…Estas sucessões são as sucessões do $'x'$. São as sucessões do $'x'$.
João: Sim.
Professor: Portanto...?
António: É o que nos está a faltar…
Professor: Calma, tu não conheces a função, não sabes como é que ela atua. Então, mas diz lá? Isto está certo…
João: Sim.
Professor: … esta sucessão tende para…
João: Menos infinito.
Professor: …menos infinito. Portanto podia-se aplicar a qual? A este limite ou àquele?
António: O da esquerda.
Professor: Tem de ser a este. E para onde é que tende a sucessão das imagens?
João: Ah, OK, já percebi.
Professor: Estás a ver? Se o enunciado diz que o limite quando $'x'$ tende para menos infinito é menos dois, quer dizer o quê? Qualquer…
João: …sucessão…
Professor: …que tenda para…
João: …menos infinito o limite é menos dois.
Professor: E deste lado…?
João: Sim, sim. Nós estávamos a fazer a sucessão dos objetos e isto é a sucessão das imagens.
Professor: Exatamente. Vocês partem da sucessão dos objetos, a sucessão das imagens vocês não sabem qual é porque não conhecem a…
João: …função.
Professor: … a função. Mas tens ali a informação.
…

Outra dificuldade bastante frequente e evidenciada nos dados recolhidos, foi a determinação analítica do sinal de limites infinitos. Quando os enunciados estão enriquecidos com gráficos, quase sempre os alunos conseguem antever o resultado correto do limite. Mas a apresentação dos cálculos denota hesitação e insegurança, uma vez que raramente fica absolutamente claro o raciocínio que conduziu à solução. Provavelmente, nas situações em que o apoio gráfico não existe, os alunos menos competentes tenderão a arriscar qual o sinal do resultado, uma vez que analiticamente não são capazes de construir a solução.

Apresentam-se dois exemplos ilustrativos. O primeiro relativo ao exercício 2 da Ficha de Trabalho nº 3, resolvido pelas alunas Margarida e Carolina (Figura 5-21):



2.
Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ e representada graficamente.

Sejam $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{n+1}{n}$ e $w_n = \frac{1-n}{n}$ os termos gerais de três sucessões.

Determina os limites das sucessões $(f(u_n))$, $(f(v_n))$ e $(f(w_n))$.

$f(u_n) = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(1-2\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1-1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} \quad \frac{1}{0^+-0^+} \to \pm\infty$

$f(v_n) = \frac{1}{1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1-\frac{n^2+2n+1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{1-n^2-2n-1}{n^2}} = \frac{1}{1-1-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{0-0} \to \pm\infty$

$f(w_n) = \frac{1}{1-\left(\frac{1-n}{n}\right)^2} =$

3.
Sejam f e g as funções de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definidas por:

Figura 5-21: Exercício 2 da Ficha de Trabalho nº 3, resolvido por Margarida e Carolina

Repare-se que não fica claro, para ambas as sucessões, se o limite é mais ou menos infinito, quer por falta de clareza na escrita do símbolo de sinal, quer principalmente porque o último quociente é completamente ambíguo (qual o sinal de $\frac{1}{0^+-0^+}$ ou de $\frac{1}{0^--0^-}$?).

Outro exemplo de maior dificuldade, uma vez que apenas consta a expressão algébrica da função, mostra bem o dilema com que o aluno é confrontado, perante a falta de informação exibida na expressão simplificada resultante da simples substituição da variável pelo valor do limite (questões 4.b e 4.c da Ficha de Trabalho nº 4, alunos Mariana/Catarina/António):

4.
Calcula os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+x^3) = 3$

$= (-1)^2 - 3\times(-1) + (-1)^3$

$= \cancel{1} + 3 + (-\cancel{1})$

$= 3$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{2-x} = +\infty$

$= \dfrac{2}{2-2}$

$= \dfrac{2}{0} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x^2+x}$

$= \dfrac{0-1}{0^2+0}$

$= -\dfrac{1}{0}$

Figura 5-22: Exercícios 4.b) e 4.c), Ficha de Trabalho nº 4, resolução de Mariana, Catarina e António

Na alínea b) o ‘palpite’ saiu errado. Já na alínea c) os alunos decidiram não arriscar ou talvez não tenham chegado a acordo. Se aplicassem o mesmo ‘critério’ aparente na alínea b), seriam conduzidos ao resultado correto.

Finalmente alguns comentários sobre outro tipo de dificuldades, não necessariamente imputáveis à falta de competências dos alunos em áreas da disciplina de Matemática. Refiro-me concretamente a atitudes (na conceção multidimensional de *disposição emocional* – gosto/não gosto; *comportamental* – consigo/não consigo; *crença ou opinião* sobre a disciplina – ser útil/interessante) (Zan & Di Martino, 2008), carências importantes no domínio da língua, falta de iniciativa e espírito crítico.

Comecemos pela iniciativa e espírito crítico. Em regra, os alunos não justificam as suas decisões nos exercícios e tarefas que lhe foram propostos. É indiferente se os enunciados pedem ou não explicitamente para que as respostas sejam fundamentadas ou, noutros casos, o aluno comente uma afirmação. Por exemplo, apenas um grupo de trabalho (Susana e Rita) apresentou alguma justificação para as questões 1 e 2 da Ficha de Trabalho nº 2 (ver Anexos 2.1 e 2.2) e, mesmo assim, só na alínea 2.a). Os alunos parecem considerar suficiente assinalar as respostas que decidem estar corretas, sem mais comentários.

Sem dúvida que uma das razões para este silêncio está nas dificuldades já mencionadas na utilização da notação matemática. No caso dos limites isso é ainda agravado pelo facto da notação ser nova e exigir, pelo menos a um nível ainda elementar como é o caso do 11.º ano, alguma complementaridade com linguagem descritiva. Mas nem assim se consegue extrair algo com significado escrito pelos alunos. Seria expectável que os estudantes com mais dificuldade em se exprimirem tecnicamente, usassem a linguagem corrente para traduzir o seu pensamento. São raros os que o fazem e, mesmo esses, apenas de forma episódica e irregular. O mesmo sucede aliás, embora em menor grau, nas intervenções orais, talvez devido ao papel catalisador do professor a que o aluno tem dificuldade em esquivar-se.

Se tivesse de selecionar a principal fonte de obstáculos demonstrada pela turma na apreensão do conceito de limite, talvez escolhesse as evidentes limitações da maioria dos alunos no manuseamento da língua portuguesa. Há problemas em todas as dimensões: expressão oral, leitura e escrita. Todas estão bem evidenciadas nos dados recolhidos. Apenas a título de exemplo, observe-se o diálogo travado pelos alunos acerca do exercício 1 da Ficha de Trabalho nº 4, ver Anexo 4.1 (alunos Mariana/Catarina/António):

> …
> **António**: Luísa, trouxeste o manual? Dá cá.
> **Mariana**: Olha, está na página 8.
> **António**: Na boa, na boa. Página quê?
> **Mariana**: Oito, volume três.
> **António**: Seja A um subconjunto de reais, ou seja, A pertencente aos reais, diz-se que ‘a’ é ponto aderente de A,…
> **Mariana**:…se existir uma sucessão…
> **António**: … de elementos de A tendente para ‘a’. Vamos designar por aderência de A o conjunto dos pontos aderentes de A. Só percebi A, ‘a’, ‘a’…
> **Mariana**: Também eu.
> **Catarina**: Não percebi nada.

Este diálogo comenta a leitura da definição de ponto aderente a um subconjunto de $\mathbb{R}$, tal qual está redigida no manual da disciplina adotado pela escola. A definição foi também transcrita no enunciado do problema, precisamente para ajudar os alunos na respetiva resolução. Para além disso, o assunto tinha sido introduzido na aula anterior e objeto do exercício 5 da Ficha de Trabalho nº 3 (tendo os alunos sido convidados a refletir previamente sobre esse exercício em casa). Um outro grupo de trabalho (Pedro/Mário) confessou igualmente, durante a apresentação da resolução no quadro, que não tinha entendido o texto da definição.

Em termos comparativos com outras proposições constantes do manual adotado do 11.º ano, esta não é seguramente das mais complexas nem das mais extensas. Antes pelo contrário. Basta por exemplo comparar com o texto da definição de limite segundo Heine. Também é certo que os alunos se depararão com textos bem mais difíceis noutras disciplinas, caso de textos literários em Língua Portuguesa. Os enunciados em matemática são normalmente densos de significado, rigorosos e muito concisos na formulação. Pelos comentários dos alunos foi isso que os 'baralhou', não conseguiram acompanhar e descodificar as várias referências ao conjunto A e a um número real (elemento ou não de A), designado por 'a'. A própria 'simplificação' implícita no uso de maiúscula para um conjunto e de minúscula para um elemento (neste caso um número real), parece ter contribuído para confundir em vez de facilitar.

A recolha destes dados, aliada à observação de aulas, permite constatar que, de um modo geral, os alunos apenas utilizam o manual para a realização de exercícios. O substrato matemático do manual, sejam definições, conceitos, teoremas ou conteúdos expositivos, são completamente ignorados pelos alunos. Os livros apresentam-se como novos e apenas estão marcados nas páginas de exercícios e das respetivas soluções; em muitos casos, somente nas páginas que foram mencionadas em aula ou para trabalhos de casa. Não vi, em qualquer das turmas, aluno algum questionar o professor ou um colega acerca de uma dúvida ou clarificação relacionada com um excerto do livro.

Da análise dos dados recolhidos pode concluir-se que a maioria dos alunos revela dificuldades no recurso a técnicas, procedimentos e noções matemáticas aprendidas em anos anteriores, intensamente mobilizadas em tarefas e exercícios exploratórios e de aplicação do conceito de limite. Mais surpreendente, foi o facto de muitos alunos parecerem não convocar plenamente os conhecimentos recentes sobre limites de sucessões no tratamento dos limites de funções, isto é, em boa parte desperdiçou-se a previsível vantagem da decisão curricular pela definição de limite segundo Heine. Sob outra perspetiva, o facto de a definição de limite, por comparação com a maior parte dos conceitos matemáticos a nível do ensino secundário, conter ainda uma forte componente verbal (em vez de fazer uso intensivo da notação sintética própria da matemática), penaliza muito a sua aprendizagem por alunos com limitações significativas no domínio da língua portuguesa.

Capítulo 6 – Conclusões e Reflexão Final

Este capítulo inicia-se com uma síntese do estudo realizado e detalhado nas páginas anteriores, expondo o contexto em que foi desenvolvido, objetivo e questões analisadas, bem como referências ao enquadramento teórico e metodologia utilizada. Em seguida apresentam-se as principais conclusões do estudo, articulando as respostas às questões formuladas com a argumentação teórica de diferentes autores sobre os temas e problemáticas subjacentes aos assuntos analisados. O relatório encerra com uma reflexão sobre a minha intervenção letiva, as principais aprendizagens a aplicar na prática profissional e algumas interrogações suscitadas durante o estudo que talvez possam constituir sugestões para temas de trabalhos futuros.

Síntese do Estudo

O presente estudo baseia-se na minha intervenção letiva na Escola Secundária Padre Alberto Neto (ESPAN), pertencente ao Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas (AEQB), envolvendo uma turma de Matemática A, curso de Ciências Socioeconómicas, do 11.º ano do ensino secundário, durante o segundo período do ano letivo 2018/2019. O relatório abrange seis aulas, cada uma com a duração de 90 minutos, totalizando doze tempos letivos. O tema programático abordado ao longo das aulas foi o dos limites de funções, integrado no domínio do estudo de funções reais de variável real. De acordo com o programa e metas curriculares para Matemática A do ensino secundário (ME, 2013), com vista ao objetivo central de aprendizagem do conceito de limite de uma função, os alunos foram confrontados com a noção de ponto aderente a um conjunto, seguida da definição de limite segundo Heine e culminando na formulação e demonstração de um conjunto de teoremas fundamentais que constituem ferramentas práticas na resolução de tarefas envolvendo, implícita ou explicitamente, o conceito de limite.

O trabalho em aula foi previamente planeado (ver planos de aula, Anexos 1 a 6) e concretizado em tarefas propostas aos alunos, organizados em grupos de trabalho previamente definidos, usando critérios como a heterogeneidade do nível de aprendizagem, de modo a tentar maximizar o rendimento de cada grupo no trabalho autónomo realizado. A turma revelou-se sempre interessada e participativa, não colocando ao professor qualquer problema de natureza comportamental. Infelizmente, no que concerne ao aproveitamento e resultados de avaliação, a turma ficou longe de um nível satisfatório, pois mais de metade dos alunos não atingiu os 10 valores e apenas sete alunos (dois dos quais já tinham frequentado a disciplina em ano anterior) se mantiveram de forma consistente acima daquela fronteira ao longo de todo o ano letivo.

O estudo centrou-se em compreender como alunos do 11.º ano se apropriam do conceito de limite de uma função real de variável real, procurando identificar dificuldades e obstáculos à apreensão do conceito e possíveis forma de os abordar e ultrapassar. Nesse sentido, e com o objetivo de orientar e concentrar o esforço de observação e análise, formulei as seguintes questões, para as quais o presente trabalho procurou encontrar respostas ou abrir novas perspetivas para investigações futuras:

i. Qual o significado do conceito de limite que os alunos apresentam ao longo do estudo?
ii. Com que conflitos cognitivos inibidores ou perturbadores da correta apreensão do conceito de limite se confrontam alguns alunos?
iii. Como mobilizam os alunos o conceito de limite na resolução de tarefas? Quais as principais dificuldades que os alunos evidenciam?

Para a planificação das aulas, fundamentação teórica do trabalho realizado e análise dos dados recolhidos, recorri às orientações curriculares para o tema em estudo, literatura e autores de referência sobre aspetos didáticos e pedagógicos associados à apropriação do conceito de limite, bem como alguns trabalhos práticos muito importantes no suporte à decisão na seleção do tipo de tarefas exploratórias ou de consolidação a apresentar aos alunos.

No que respeita especificamente à metodologia e tipo de dados recolhidos, inclui a observação direta em sala de aula, notas de campo, registo áudio e escrito do trabalho desenvolvido pelos alunos, resolução de um miniteste de avaliação sumativa e uma entrevista realizada a dois alunos. A análise dos dados seguiu a análise de conteúdo.

Conclusões do Estudo

O presente estudo confirma, em termos de opinião e fundamentação teórica de diferentes autores, a relevância do conceito de limite na matemática atual. Justifica-se assim o destaque da temática dos limites no currículo de matemática do ensino secundário na área científica. São também conhecidas as dificuldades dos alunos na abordagem à noção de limite, bem como em matérias subsequentes em que o conceito está omnipresente, como é o caso da continuidade, das derivadas e do cálculo integral. Assim, a identificação de algumas dessas dificuldades e formas de as ultrapassar, constitui o objetivo fundamental deste estudo.

Conceito de Limite

A noção de limite, embora estando presente em reflexões filosóficas desde o tempo dos gregos, pelo menos, só há cerca de duzentos anos teve uma formulação rigorosa. Trata-se de um conceito reconhecidamente central, não só na matemática, mas em praticamente todas as áreas da ciência (Zollman, 2014).

Se nos restringirmos especificamente à matemática, o conceito de limite é hoje a base de praticamente todo o Cálculo (Salas, Hille, & Etgen, 2007). Por sua vez, e de um ponto de vista mais prático, a par com a geometria euclidiana, o Cálculo tem demonstrado ser uma das áreas mais originais e profícuas da matemática (Kline, 1959). Torna-se por isso difícil subestimar a importância de uma correta apropriação do conceito de limite por parte dos alunos.

De acordo com o atual currículo de matemática, só os alunos do ensino secundário, cursos de ciências e tecnologias e ciências socioeconómicas, têm o conceito de limite como um dos temas a abordar no 11.º ano de escolaridade. Trata-se portanto de alunos que decidiram seguir estudos superiores em matemática ou em áreas científicas onde o papel da matemática é fundamental. Face ao cunho estruturante do conceito no trabalho científico, qualquer limitação ou insuficiência na sua aprendizagem pode facilmente ter consequências negativas na interpretação de resultados experimentais, ou originar erros de formulação e modelação dos fenómenos em estudo.

O conceito de limite tem assim o aliciante de ser simultaneamente complexo e fundamental. A sua presença no currículo do ensino secundário é hoje inquestionável. Tentar simplificar a aprendizagem do conceito através de estratégias que evitem o confronto dos alunos com alguns dos obstáculos cognitivos mais comuns à sua correta apreensão, pode ser uma tentação gratificante em termos imediatos, mas vai colocar dificuldades acrescidas aos estudantes no ensino superior.

Não foi possível detetar, durante o estudo, uma evolução significativa do conceito de limite por parte dos alunos. É frequente os alunos confundirem o limite com o valor da função no ponto e, em consequência, concluírem à priori que ele não existe num ponto aderente não pertencente ao domínio da função. Paradoxalmente, alguns alunos mantiveram arreigada a convicção de o limite ser um valor de que a função se aproxima sem nunca o atingir. Todavia, constatei progresso num maior cuidado e preocupação dos alunos no uso correto da notação matemática associada aos limites. A opção pela definição de Heine parece adequada, já que permite aos estudantes continuar a aplicar e aprofundar o que acabaram de aprender sobre limites de sucessões. No entanto, os alunos não conseguem aplicar a definição de Heine na resolução de tarefas, têm dificuldade em descodificar expressões como 'tende para…' e muitos deles não ultrapassam a necessidade de apoio gráfico na abordagem aos limites. Ou seja, a maioria dos alunos mostrou grande apetência pela representação gráfica de funções e, em consequência, também maior conforto nas tarefas sobre limites em que a função em estudo estava representada graficamente. Embora isso seja um importante indicador para o professor numa primeira abordagem do conceito de limite, é fundamental que os alunos sejam capazes de perspetivar o conceito segundo diferentes representações e inclusivamente em combinações entre elas (Tall, 1992).

Conflitos Cognitivos na Apropriação do Conceito de Limite

Não foi fácil, durante o estudo, isolar dificuldades manifestadas pelos alunos que pudéssemos inequivocamente associar ao conceito de limite. De facto, muitos alunos denotam limitações a nível de leitura e expressão escrita, traduzindo-se em dificuldade na interpretação de enunciados e na justificação das suas decisões na resolução de tarefas. A intervenção oral destes alunos durante as discussões em turma permite, de um modo geral, obter informação mais rica sobre o seu pensamento, mas mesmo aí existem limitações evidentes, nomeadamente na correta utilização da linguagem matemática.

Outro aspeto também restritivo em termos de análise de dados, foi a impreparação dos alunos quanto a conhecimentos básicos de Aritmética, Álgebra e Geometria. A abordagem dos alunos a algumas tarefas esbarrou com dificuldades que nada tinham a ver com o principal objetivo de exploração do conceito de limite. Os alunos debatiam-se com obstáculos básicos, por exemplo no domínio do cálculo aritmético fundamental, que os impediam de prosseguir na resolução e confrontar os detalhes relacionados com o conceito de limite.

Algumas das dificuldades cognitivas colocadas pelo conceito de limite e enunciadas por Tall (Tall, 1992) foram claramente identificadas no presente estudo, como por exemplo:

- Dificuldades associadas à linguagem utilizada: termos como 'limite', 'tender para', 'aproximar a', 'tão pequeno quanto se queira', com um significado coloquial conflituante com o conceito formal de limite;
- O processo de abordagem do limite não é efetuado com recurso à álgebra ou aritmética simples. Surgem conceitos associados a infinito e o resultado final acaba por ficar 'envolvido em mistério' para muitos alunos;
- Os alunos muitas vezes denotam dificuldades em entender se o limite pode efetivamente ser atingido. Outras vezes, talvez pela mesma razão, não reconhecem de imediato que uma função constante tem obviamente limite;
- Há confusão na passagem do finito ao infinito, no entendimento 'do que acontece no infinito'.

Também na forma como a maioria dos alunos tenta ultrapassar estes obstáculos, se observou uma concordância entre os dados recolhidos e alguns estudos apresentados na literatura. De facto, os alunos procuram resistir aos esforços do professor para uma reconstrução nova e coerente a partir da reconciliação entre conceitos antigos e o novo conceito proposto, preferindo manter os elementos conflituantes em compartimentos mentais distintos, evitando e separando a problemática teórica dos métodos práticos de resolução de problemas. Por mais que as tarefas tenham sido concebidas para promover a discussão e aprofundamento do conceito de limite, os alunos preferem e tendem a refugiar-se em aspetos laterais, como desigualdades, valor absoluto ou em operações algébricas sobre limites. Há uma clara separação e privilégio do conhecimento procedimental sobre o conhecimento conceptual (Cornu, 2002; Fernández-Plaza et al., 2013; Tall, 1992). Como consequência, pode afirmar-se que a compreensão instrumental domina claramente a compreensão racional do conceito (Skemp, 1976), quando era recomendável um maior equilíbrio entre estas duas dimensões.

O estudo permitiu também, fundamentalmente através das entrevistas realizadas e de questões colocadas à turma antes e depois das aulas lecionadas, perceber a forma como pensavam e concebiam a noção de limite. Por exemplo, questionando os alunos sobre a identidade entre a dízima infinita 0,(9) e a unidade (Tall, 2012), foi sistemático o reconhecimento de que a dízima se aproximava cada vez mais da unidade, mas manteve-se inalterada a relutância em aceitar a igualdade. Ou seja, estes dados apontam claramente para o ‘aproximar…sem atingir’ referido em algumas investigações aplicadas ao conceito de limite (Cornu, 2002).

Resposta semelhante deu a maioria dos alunos, quando confrontados com a pergunta aberta sobre o que significava para si o conceito de limite. A resposta mais frequente referia um valor do qual a função (ou sucessão) se aproxima sem nunca o atingir. É provavelmente esta ‘conceção-imagem’ (na terminologia de Tall & Vinner, 1981) que explica a dificuldade de alguns alunos em reconhecer imediatamente que a função (ou sucessão) constante tem limite. Efetivamente, mesmo os alunos mais competentes da turma tiveram dificuldade em resolver um exercício em que aquele reconhecimento era exigido (questão 4 da Ficha de Trabalho nº 2).

Em conclusão, foi possível identificar exemplos de diferentes obstáculos que impactam e podem comprometer ou dificultar a aprendizagem do conceito de limite. É tarefa do professor identificar e procurar que os alunos os ultrapassem com sucesso, em especial os de natureza didática, pois estão diretamente ligados ao ensino e à ação do professor.

Utilização do Conceito de Limite na Resolução de Tarefas

Na planificação das aulas adotou-se uma abordagem privilegiando uma primeira conceção operacional do conceito de limite, progredindo gradualmente para tarefas onde se procurava induzir os alunos a evoluir para uma conceção estrutural (Sfard, 1991). Tanto quanto possível, procurou-se identificar e desmontar conceitos-imagem conflituantes, quer entre si, quer com o conceito matemático formal de limite (traduzido simbólica e sintaticamente na definição de Heine), de modo a permitir a apropriação correta do conceito na mente do estudante (Tall & Vinner, 1981).

Não parece suficiente apresentar aos alunos uma exposição clara do conceito de limite para garantir que eles o entendam e interiorizam. Antes da sessão onde a noção de limite é explicitamente apresentada, os estudantes devem ser confrontados com atividades apropriadas que os ajudem (e ao professor) a identificar e consciencializar ideias espontâneas, imagens, intuições, experiências, que serão provavelmente mobilizadas durante o processo de aprendizagem do conceito de limite (Cornu, 2002).

Foi esta a preocupação subjacente à seleção das tarefas apresentadas aos alunos na primeira aula sobre limites de funções (ver Ficha de Trabalho nº 1).

Pretendeu-se, especialmente no plano das primeiras quatro aulas, apresentar aos alunos tarefas que evidenciassem a utilidade do conceito de limite, de forma a manter a turma envolvida e motivada na resolução de problemas valorizados pelos próprios alunos. Dado o volume de matéria e a necessidade de exercitar os alunos na aplicação dos teoremas sobre álgebra dos limites, a planificação das duas últimas sessões incidiu, quase exclusivamente, sobre exercícios de destreza operacional no cálculo de limites de expressões e levantamento de indeterminações.

Este objetivo de tentar que os alunos valorizassem a importância do conceito de limite na resolução de problemas do mundo real não foi alcançado. Numa das entrevistas realizadas e em vários momentos registados em áudio, foi patente a apreensão dos alunos sobre a utilidade prática do que estavam a aprender. Curiosamente, esta incompreensão é aparentemente menor quando a tarefa é mais procedimental e menos conceptual, ou seja, os alunos parecem acomodados à ideia de que a noção de limite só serve para resolver exercícios sobre limites. É por isso importante, tal como refere a literatura (Cornu, 2002), apresentar aos alunos tarefas sobre limites em que seja evidenciada a respetiva aplicação em áreas exteriores à própria matemática. Um conceito só é efetivamente apreendido quando pode ser aplicado. Estes exemplos são no entanto difíceis de encontrar, exigindo frequentemente grande esforço de adaptação à realidade de cada turma e ao próprio programa da disciplina.

Uma das maiores dificuldades reveladas pelos alunos na resolução das tarefas propostas está relacionada com o conceito de função. Neste aspeto, a definição de limite segundo Heine é bastante exigente, uma vez que requer que o aluno compreenda que a imagem da sucessão de objetos é também uma sucessão. É aliás da articulação e comportamento destas sucessões que depende a conclusão de haver ou não limite da função. Os dados evidenciaram dificuldades como confusão entre objeto e imagem, não determinação do termo geral da sucessão imagem ou marcação errada de pontos da função no plano cartesiano. Nestas situações, talvez fosse vantajoso apresentar aos alunos tarefas em que o conceito de limite fosse abordado numa perspetiva diferente da de Heine.

Analisando a resolução das tarefas propostas aos alunos, concluo que deveriam ter sido mais diversificadas e diferenciadas de acordo com as preferências (por exemplo privilegiar aproximações gráficas em detrimento de algébricas) e tipo de dificuldades manifestadas pelos alunos. Isso exigiria, contudo, bastante mais tempo dedicado à identificação e diagnóstico do tipo de obstáculos cognitivos (incluindo limitações no domínio de noções apreendidas no ensino básico) mais impactantes na correta apreensão do conceito de limite pelos alunos.

Reflexão Final

A diversidade de conceções, a riqueza e complexidade das noções e os obstáculos cognitivos, tornam o ensino-aprendizagem do conceito de limite extremamente difícil. Já foram efetuadas muitas tentativas para ultrapassar o problema, mas com pouco sucesso (Cornu, 2002).

Parece consensual, dentro da comunidade científica que estuda a didática e em particular a sua aplicação específica à matemática, que a aprendizagem e ensino do conceito de limite constitui um desafio difícil para alunos e docentes. Mais que qualquer outro conteúdo, exige uma boa preparação e planificação de cada aula pelo professor, devendo a aula seguinte ser pensada em função dos resultados e incidências observadas na aula anterior.

Ainda assim, o sucesso está longe de estar garantido. Dubinsky (2002) coloca mesmo a questão em termos de a aprendizagem poder ser impossível. Se o indivíduo tenta aplicar 'esquemas' (no sentido dado por Piaget, como coleção coerente de objetos e processos) para compreender a realidade (por um processo construtivo a que chama 'reflective abstraction'), como será por exemplo possível a um aluno entender (e aplicar) o conceito de prova por indução se previamente não dispõe de qualquer 'esquema' mental acerca do que consiste uma prova em matemática? (Dubinsky, 2002). Os processos de acomodação e assimilação associados à integração e progresso do conhecimento não poderão funcionar nestas circunstâncias. Os esforços do professor encontrarão um muro intransponível.

O professor deve assim começar por conhecer bem o nível cognitivo dos seus alunos a Matemática. E, caso existam grandes disparidades, será certamente muito difícil obter bons resultados. Um conflito cognitivo (por exemplo entre conceito-definição e conceito-imagem) só deverá ser evidenciado pelo professor caso este anteveja, por parte do aluno, alguma possibilidade de o ultrapassar e assim alcançar um patamar intelectual superior no entendimento do conceito. Caso contrário, será preferível evitar o conflito. Muitas vezes o conceito-imagem, apesar de distinto do conceito-definição, é suficiente para a resolução da maioria dos problemas matemáticos colocados à turma e não compromete o aproveitamento à disciplina. Claro que isto não é aceitável para alunos que necessitem da Matemática nos seus estudos superiores (Vinner, 2002).

Estamos definitivamente perante um imenso desafio. Espero que o presente trabalho represente mais uma contribuição, ainda que reduzida, para um maior conhecimento do tema. Uma coisa parece adquirida: o papel central do professor no processo de aprendizagem dos seus alunos. A comunicação entre professor e aluno na aula de Matemática deve ser entendida numa dupla perspetiva: comunicação como organização e transmissão de informação por um lado; comunicação como um processo de interação social por outro (Ponte et al., 2007). Ambas são fundamentais no processo de ensino-aprendizagem. A Matemática deve ser encarada como uma construção cultural partilhada pelos intervenientes e as aulas caracterizadas pelos processos de interação social entre o professor e os alunos no contexto escolar.

Para além disso, a Matemática, do ponto de vista curricular, não pode ser encarada como uma espécie de 'manta de retalhos', focada no domínio de algoritmos procedimentais. Muitos manuais apresentam 'problemas' que podem ser resolvidos sem recurso ao seu substrato matemático, aplicando cegamente técnicas acabadas de aprender. As boas práticas de ensino deveriam compensar estes textos inadequados, mas infelizmente isso nem sempre sucede, sendo tais manuais tomados como autoridades de conhecimento e guias de aprendizagem, limitando-se muitos professores a 'seguir o texto' (Schoenfeld, 1988).

Esta não foi a minha primeira experiência de lecionação. Dei aulas de Matemática, há cerca de trinta anos, a alunos do ensino básico. O contexto atual de apoio formativo e teorização académica representaram um enorme salto e enriquecimento cognitivo da maior importância para o meu futuro na área da educação, seja como professor ou noutro qualquer papel de agente educativo. Procurarei aplicar e continuar a estudar as ideias, metodologias, técnicas, procedimentos e boas práticas que me foram transmitidas ao longo do curso.

Relativamente à minha prestação em sala de aula, recebi inúmeras críticas e comentários que me levaram a refletir e concluir que hoje faria diferente. Preocupou-me em particular o ritmo excessivamente lento com que as diversas tarefas foram sendo resolvidas, com a consequência de ter ficado muito aquém dos objetivos que me tinha proposto cumprir no final das seis aulas lecionadas. Assumo que tal se deveu a dificuldades próprias na gestão do tempo em sala, uma ambição excessiva em termos de planificação de cada aula e avaliação da prestação da turma, bem como à minha inexperiência como professor. Penso no entanto que seria interessante realizar um estudo sobre a produtividade dos alunos em tarefas de trabalho autónomo de carácter exploratório, com o objetivo de tentar definir modelos que se revelassem mais eficientes.

As inúmeras pesquisas bibliográficas que realizei, a recolha e análise de dados, as discussões com pares e professores orientadores, a interação com os alunos em sala de aula, as minhas próprias reflexões, suscitaram questões que gostaria de aprofundar e que talvez possam ser objeto de futuros trabalhos de mestrado. Realço três que considero mais prementes:

- Em que medida as dificuldades e lacunas em noções elementares de Aritmética, Álgebra e Geometria podem condicionar a aprendizagem do conceito de limite por alunos do ensino secundário? Que estratégias adotar para as ultrapassar, sem interferir com o aproveitamento escolar dos restantes alunos da turma?
- Impacto de limitações no uso da Língua Portuguesa na aprendizagem do conceito de limite no ensino secundário. O estudo deverá contemplar as vertentes de escrita, leitura e expressão oral (na dupla condição de emissor e recetor discursivo), avaliando separadamente os seus efeitos na aprendizagem do conceito.
- Papel das crenças (próprias ou induzidas) no ensino-aprendizagem da matemática no ensino secundário em geral e no conceito de limite em particular. Efeitos em aprendizagens subsequentes (também a nível secundário), nomeadamente nos conceitos de continuidade, derivada e integral.

Termino com um trecho que achei curioso e estou certo constituiria, pelo seu carácter polémico, um excelente tema para reflexão e estudo:

«We do not believe in “mathematics for all”. We do believe in some mathematics for some students. And even this can be achieved only by appropriate pedagogy under appropriate conditions for learning.» (Vinner, 2002, p.81)

Referências

Abrantes, P. (1985). Planificação no ensino da matemática. Texto de apoio à disciplina de Metodologia da Matemática. Lisboa. Departamento de Educação da FCUL.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. Educational Studies in Mathematics, 59(1-3), 235-268.

Bagni, G. T. (2005). The historical roots of the limit notation: Cognitive development and development of representation registers. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5(4), 453-468.

Bardin, L. (1977). Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70.

Barufi, M. C. B. (1999). A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese para obtenção do título de Doutor em Educação. Faculdade de Educação. USP. São Paulo.

Becker, H. S., & Geer, B. (1969). Participant observation and interviewing: a comparison. In J. G. McCall, & J. L. Simmons (Eds), Issues in participant observation: a text and reader (pp.322-331). Reading, MA: Addison-Wesley.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. Práticas de ensino da Matemática, 99-104. SPIEM.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. Investigação em educação matemática, 255-266.

Cohen, C., Manion, L., & Morrison, K. (2007). Research methods in education (6th ed.).

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 153-166). Kluwer Academic Publishers.

D. G. Denbel, D. G. (2014). Students' Misconceptions of the Limit Concept in a First Calculus Course, J. Educ. Pract., vol. 5, no. 34, pp. 24–41.

Dias, S. & Santos, L. (2009). Avaliação reguladora, feedback escrito, conceitos matemáticos: Um triângulo de difícil construção. XXSIEM (CD-ROM). Lisboa: APM.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Elterman, F., & Gong, C. (1988). The student's construction of quantification. For the Learning of Mathematics-An International Journal of Mathematics Education, 8, 44-51.

Ervynck, G. (2002). Mathematical Creativity. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 42-53). Kluwer Academic Publishers.

Fernandes, D. (2005). Avaliação das Aprendizagens: Reflectir, Agir e Transformar. In Futuro Congressos e Eventos (Ed.), Livro do 3.º Congresso Internacional Sobre Avaliação na Educação, pp. 65-78. Curitiba: Futuro Eventos.

Fernandes, D. (2006). Avaliação, aprendizagens e currículo: Para uma articulação entre investigação, formação e práticas. In Raquel Barbosa (Org.), Formação de educadores: Artes e técnicas – Ciências e políticas, pp. 15-36. São Paulo: Editora UNESP.

Fernandes, D. (2009). O papel dos professores no desenvolvimento da avaliação para as aprendizagens. In Sapiens 2009 (Ed.), Anais do VIII Congresso Internacional de Educação, pp. 41-45. Recife, PE: Sapiens – Centro de Formação e Pesquisa.

Fernández-Plaza J. A., Rico L. & Ruiz-Hidalgo J. F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: meanings and specific terms. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.

Franco, M. L. P. B. Análise de conteúdo. 3 ed. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

Güçler, B. (2012). Limitless Ways to Talk about Limits: Communicating Mathematical Ideas in the Classroom, Mathematics Teacher 105 (9), 697–701.

Guimarães, H., Martins, A., Figueiral, L. & Abreu, M. (2013). Aprender Matemática: porquê e para quê? *Educação e Matemática*. 125, 61-71.

Katz, V. J. (2010). História da Matemática. 2º ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Kline, M. (1959). Mathematics and the Physical World. Great Britain. John Murray (Publishers) Ltd

ME (2001/02). Programa de Matemática A, Ensino Secundário (10.º, 11.º e 12.º anos). Lisboa: Autor.

ME (2004/05). Programa de Matemática dos Cursos Profissionais de Nível Secundário. Lisboa: Autor.

ME (2013). Programa e Metas Curriculares Matemática A. Ensino Secundário. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Lisboa: Autor.

ME (2013b). Programa e Metas Curriculares Matemática. Ensino Básico. Lisboa: Autor.

MEC (2014). Programa e Metas Curriculares Matemática A. Ensino Secundário. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas (Submetido à consulta pública, 2013). Lisboa: Autor.

NCTM (1999). Normas para a Avaliação em Matemática Escolar. Lisboa: APM

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H.; Menezes, L.; Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. Quadrante, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 1-25.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C. et al. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. Revista Portuguesa de Educação, 20(2), 39-74.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula?. Educação e Matemática, 133 (pp. 26-35). Lisboa: APM.

Quezada, V. D. (2019). Limits Problem Solving in Engineering Careers: Competences and Errors (Version 10010543). International Journal of Business, Human and Social Sciences, 12.0(7).

Salas, Hille, & Etgen (2007). Calculus: One and several variables, 10th ed. New York: John Wiley and Sons.

Santos, L. (2018). Dilemas desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), Avaliação em Matemática: Problemas e desafios (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como fator estruturante. In F. Veiga (Coord.), O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos (pp. 503-539). Lisboa: Climepsi Editores.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses. Educational psychologist, 23(2), 145-166.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender Matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Schwarzenberger, R. L. E. & Tall, D. O. (1978). Conflicts in the Learning of real numbers and limits, Mathematics Teaching, 82, 44-49.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflection on processes and objects as different sides of the same coins, Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics, 18, 371–397.

Silva, J. S. (1978). Compêndio de Matemática (Vol. 2º): GEP do MEC.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 77, 20-26.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313-340.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). Educação e Matemática, 105, 22-28.

Sullivan, P., Mousley, J. & Zevenbergen, R. (2006). Developing Guidelines for Teachers Helping Students Experiencing Difficulty in Learning Mathematics. In identities, cultures and learning spaces: proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics. Education Research Group of Australasia, held at Rydges Lakeside Hotel, Canberra, 1-5 July 2006, MERGA, Pymble, N.S.W., pp. 496-503.

Tall, D. O. (1977). Conflicts and Catastrophes in the Learning of Mathematics, Mathematical Education for Teaching, 2, 1977.

Tall, D. O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 170-176).

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. O. (1992). Students' Difficulties in Calculus. Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7, Québec, Canada: 13–28.

Tall, D. O. (1992a). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In Grouws, D.A. (ed) Handbook of Research on Mathematic Teaching and Learning. New York: McMillan: 495-511.

Tall, D. O. (2012). A Sensible Approach to the Calculus. To appear in Handbook on Calculus and its Teaching, ed. François Pluvinage & Armando Cuevas.

Todorov, T.D. (2011), Back to classics: teaching limits through infinitesimals, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 1, 1-20.

Tomlinson, C., Brighton, C., Hertberg, H., Callahan, C., Moon, T., Brimijoin, K., Conover, L., & Reynolds, T. (2003). Differentiating Instruction in Response to Student Readiness, Interest, and Learning Profile in Academically Diverse Classrooms: A Review of Literature. Journal for the Education of the Gifted. Vol. 27, No. 2/3, 2003, pp. 119–145.

Viegas, C., & Valente, S. (2016). *MAT 11 – Matemática A, 11.º ano*. Volumes 1,2 e 3. 1ª Edição. Texto Editores.

Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.

Williams, S. R. (1991). Models of Limit held by College Calculus Students in Journal for Research in Mathematics Education 22(3):219-236

Zan, R., & Di Martino, P. (2008). Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. In Sriraman, B., editor, Beliefs and Mathematics–A Volume in the Montana Mathematics Enthusiast, volume 3, pages 197–208. Information Age Publishing, Inc., Charlotte, NC.

Zollman, A. (2014). University students' limited knowledge of limits from calculus through differential equations. The mathematics education for the future project: Proceedings of the 12th International Conference, (pp. 693-698).

Anexos

Anexo 1: Plano de Aula 1

Plano de Aula - 11 de março de 2019

Matemática A

Domínio: Funções Reais de Variável Real
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Sumário (2 tempos = 90 minutos)
▪ Revisão de termos e conceitos fundamentais associados a funções (objeto, imagem, domínio, contradomínio, conjunto de chegada); ▪ Sucessão de objetos e correspondente sucessão de imagens; ▪ Limite, segundo Heine, de uma função num ponto aderente do seu domínio

Objetivos
▪ Constatar que uma função transforma uma sucessão de objetos numa sucessão de imagens ▪ A convergência da sucessão de objetos não implica a convergência da sucessão de imagens (e vice-versa) ▪ Compreender a definição de limite (segundo Heine) de uma função num ponto e aplicá-la na resolução de exercícios

Conhecimentos Prévios
▪ Noção de limite de uma sucessão; ▪ Propriedades e teoremas sobre limites de sucessões; ▪ Definição de função e suas principais propriedades; ▪ Domínio, contradomínio e conjunto de chegada de uma função; ▪ Representação gráfica de funções e identificação dos pontos correspondentes aos pares (objeto, imagem pela função): $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$

Capacidades Transversais
▪ Raciocínio Matemático; ▪ Comunicação Matemática, oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, explicando raciocínios e apresentando conclusões de forma clara e rigorosa; ▪ Trabalhar em grupo, aproveitando sinergias geradas pela colaboração e cooperação

Metodologia de Trabalho
▪ Turma organizada em grupos de trabalho de dois ou três alunos;

Metodologia de Trabalho
▪ Apresentação de uma tarefa envolvendo duas funções distintas, em que se explorará a transposição de uma sucessão de objetos para a correspondente sucessão de imagens, como antecâmara da definição de limite segundo Heine; ▪ Discussão de resoluções selecionadas com toda a turma, sistematização de resultados e conclusões

Avaliação
▪ A produção dos alunos será analisada e avaliada através de gravação áudio e fotos da atividade de resolução de alguns grupos de trabalho; ▪ Serão igualmente registadas notas de campo baseadas na atividade e comportamento geral da turma em aspetos como ○ Pontualidade; ○ Interesse e participação nas atividades propostas; ○ Cooperação e espírito de entreajuda no trabalho em grupo; ○ Aplicação e integração de conhecimentos anteriores nos novos conteúdos; ○ Utilização correta de simbologia e linguagem matemática ○ Comportamento em sala de aula

Recursos
▪ Por parte do **Professor**: ○ Canetas de cores distintas (mínimo 2 cores); ○ Manual da disciplina adotado pela escola; ○ Tarefas e exercícios a propor aos alunos (Ficha de Trabalho nº 1). ▪ Por parte do **Aluno**: ○ Caderno diário de apontamentos; ○ Calculadora gráfica

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Início da aula	
▪ Apresentação da tarefa 1 da 'Ficha de Trabalho nº 1'	5
▪ Início da resolução da tarefa pela turma, em grupos de trabalho autónomo de dois ou três alunos	10-15
▪ Apresentação de uma resolução da alínea 1.a) com discussão para esclarecimento de dúvidas	10
▪ Apresentação de uma resolução da alínea 1.b) com discussão para esclarecimento de dúvidas	5

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Apresentação de uma resolução da alínea 1.c) com discussão para esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Resolução autónoma da tarefa 2 da 'Ficha de Trabalho nº 1'	10
▪ Apresentação de resoluções selecionadas da tarefa 2 com discussão para esclarecimento de dúvidas	10
▪ Resolução autónoma dos exercícios 3 e 4 da 'Ficha de Trabalho nº 1'	10
▪ Apresentação de resoluções dos exercícios 3 e 4 com discussão para esclarecimento de dúvidas	10
▪ Síntese e conclusões a que nos podem conduzir as tarefas e exercícios executados na aula; ▪ Definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine	10
▪ Encerramento da aula	

Desenvolvimento da Aula

- ***Início da aula com apresentação sucinta da tarefa 1 (Ficha de Trabalho nº1)***

A turma será informada do início do domínio dedicado às funções reais de variável real, pelo que devem recordar os conceitos de definições já apreendidos em anos anteriores relativos ao tratamento de funções.

Será salientado que o conteúdo que irá ser abordado nas próximas aulas apela permanentemente ao conceito de sucessão real, pelo que continuarão a aplicar de forma direta e explícita os conhecimentos de sucessões que acabaram de adquirir.

Distribuição da 'Ficha de Trabalho nº 1', solicitando aos alunos que iniciem a respetiva resolução em grupos de trabalho autónomo, como é comum na turma.

- ***Resolução da tarefa 1 pela turma, em grupos de trabalho autónomo de dois ou três alunos***

Os grupos de trabalho iniciam a resolução da ficha de trabalho. O Professor deambula pela sala, respondendo a eventuais questões que lhe sejam colocadas pelos alunos. Os grupos que conseguirem resolver mais rapidamente a tarefa 1 poderão seguir para a tarefa seguinte indicada na ficha de trabalho.

Ao seguir as diferentes resoluções e observar dificuldades, o Professor selecionará algumas resoluções para apresentação no quadro e discussão entre todos.

- ***Apresentação de uma resolução, discussão e conclusão***

As alíneas 1.a1), b1) e c1), são bastante parecidas e não deverão levantar questões muito distintas, até porque a função $\boldsymbol{f}$ é linear. Por isso convidarei um aluno de cada um dos grupos previamente selecionados durante a observação da resolução autónoma para apresentar a sua solução no quadro, perante a turma. Como habitualmente, convidarei a

Desenvolvimento da Aula

turma a criticar cada resolução, apresentar soluções alternativas e colocar dúvidas sobre pontos que considere menos claros ou incorretos.

Em particular será interessante verificar se alguns grupos descobrirão que a alínea c) se pode resolver simplesmente a partir dos resultados já obtidos nas duas alíneas anteriores.

Já as alíneas 1.a2), b2) e c2) poderão suscitar dificuldade acrescida, uma vez que apela para uma maior generalização e abstração, ao solicitar que o aluno apresente o termo geral da sucessão de imagens. Por isso, prevejo dedicar a estas alíneas, em particular à c2), um pouco mais de tempo que às anteriores.

- ***Resolução (seguida de discussão) da tarefa 2 pelos alunos em trabalho autónomo***

A tarefa 2 da ficha de trabalho é muito semelhante à anterior, pelo que espero que os alunos revelem maior desenvoltura e rapidez na sua execução. A diferença reside no facto da nova função, g ,já não ser tão simples como a função linear f da tarefa anterior. Trata-se de uma função com dois ramos lineares distintos, separados no ponto de abcissa 2.

Seguir-se-á a mesma metodologia descrita para a tarefa 1, dando no entanto especial atenção à forma como os alunos abordam a sucessão de imagens na vizinhança do ponto de descontinuidade da função g .

- ***Resolução do exercício 3 pela turma, em grupos de trabalho autónomo***

A discussão em turma deste exercício será um momento fundamental da aula, já que as respostas apresentadas em forma de escolha múltipla constituem uma primeira abordagem à definição de limite segundo Heine, para além de contribuírem para a consolidação pelos alunos da ideia de sucessão de imagens como transformada (pela função em estudo) da sucessão de objetos.

Após o período dedicado a resolução autónoma, será fundamental discutir na turma uma resolução que seja suficientemente rica para permitir não só identificar a resposta correta, mas igualmente clarificar o que leva à rejeição das demais.

- ***Resolução do exercício 4 pela turma, em grupos de trabalho autónomo***

Neste exercício o maior desafio é colocado pela alínea a), uma vez que remete para o limite no ponto de descontinuidade da função g . Será por isso um bom teste sobre as aprendizagens alcançadas pelos alunos em consequências dos exercícios e tarefas anteriores da ficha de trabalho. Permitirá igualmente uma primeira abordagem, ainda que implícita, ao conceito de limite lateral a apresentar formalmente numa aula posterior.

Assim, darei uma especial ênfase na discussão à resolução da alínea a), esperando que as conclusões relativas à alínea b) não mereçam reparos ou dúvidas significativas por parte da turma.

- ***Definição de limite, segundo Heine, de uma função real de variável real / Encerramento da aula***

Tenciono encerrar a aula apresentando à turma a definição de Heine. Esta é enunciada no final da ficha de trabalho, acompanhada de um gráfico sugestivo do processo envolvido na definição, de forma a que os alunos tenham sempre disponível o texto em linguagem cuidada e rigorosa.

Desenvolvimento da Aula
A minha preocupação será procurar garantir que os alunos entendam a abrangência da definição, no sentido de que bastará um contraexemplo para que uma sucessão não tenha limite real definido num ponto aderente ao seu domínio. Pode suceder que não tenha tempo para apresentar a definição de Heine. Se isso suceder, convidarei os alunos a ler e refletir em casa acerca do texto da definição no final da ficha de trabalho e será o primeiro tema a abordar no início da aula seguinte.

Anexo 1.1.a): Transformação da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ pela função $\boldsymbol{f}$

Tarefa 1.1.a): Transformação da sucessão $\boldsymbol{u_n = 2 + \frac{1}{n}}$ pela função $\boldsymbol{f}$ (enunciado)

Seja $\boldsymbol{f}$ a função de domínio $\mathbb{R}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x - 1$$

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.11

a)

Considera a sucessão (u_n) definida por $\boldsymbol{u_n = 2 + \frac{1}{n}}$.

a1)

Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função $\boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{u_n}$	$\boldsymbol{f(u_n)}$
1		
2		
3		
4		
5		

No referencial da **Figura 1** está representado o gráfico da função $\boldsymbol{f}$. Assinala no gráfico os pontos de coordenadas

$$(u_1, f(u_1)),\ (u_2, f(u_2)), \ldots, (u_5, f(u_5))$$

Tarefa 1.1.a): Transformação da sucessão $\boldsymbol{u_n = 2 + \frac{1}{n}}$ pela função $\boldsymbol{f}$ (enunciado)

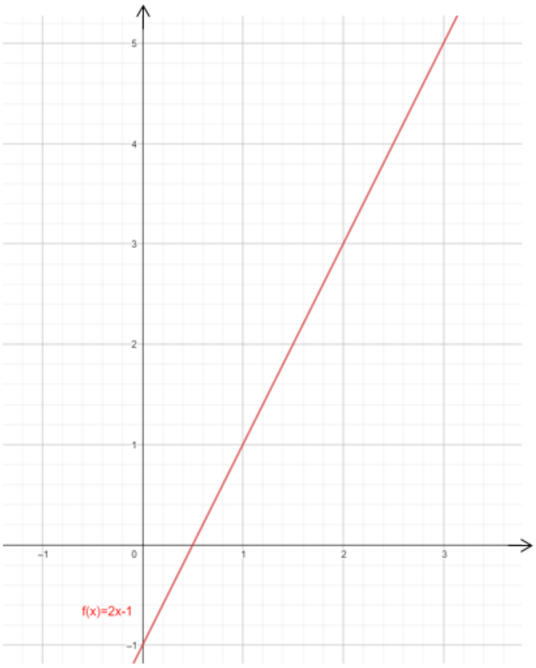


Figura 1 – Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = 2x - 1}$

a2)
Obtém o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{a_n}) = (\boldsymbol{f(u_n)})$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

Tarefa 1.1.a): Transformação da sucessão $\boldsymbol{u_n = 2 + \frac{1}{n}}$ pela função $\boldsymbol{f}$ (resolução)

a1)

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{u_n}$	$\boldsymbol{f(u_n)}$
1	3	5
2	$\frac{5}{2} = 2{,}5$	4
3	$\frac{7}{3} = 2,(3)$	$\frac{11}{3} = 3,(6)$
4	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{7}{2} = 3{,}5$
5	$\frac{11}{5} = 2{,}2$	$\frac{17}{5} = 3{,}4$

a2)
Observando a definição de $f(x)$ conclui-se que $\boldsymbol{f(u_n) = 2.u_n - 1}$. Substituindo a expressão da sucessão u_n e simplificando obtém-se

$$\boldsymbol{a_n} = f(u_n) = 2.\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \boldsymbol{3 + \frac{2}{n}}$$

Tarefa 1.1.a): Transformação da sucessão $\boldsymbol{u_n} = \mathbf{2} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ pela função $\boldsymbol{f}$ (resolução)
O termo geral da sucessão de imagens $(f(u_n))$, que resolvemos designar por $(\boldsymbol{a_n})$, é pois $\mathbf{3} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}$. Finalmente, aplicando a álgebra de limites de sucessões e atendendo a que $\frac{2}{n}$ é um infinitésimo, conclui-se que $$\mathbf{lim}\, \boldsymbol{a_n} = \lim f(u_n) = \lim\left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + \lim\frac{2}{n} = \mathbf{3}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não perceber o que são as imagens dos termos da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$	Explicar que uma função é uma transformação e que, neste caso, se escolhem como objetos (isto é, elementos do domínio da função) precisamente alguns termos da sucessão (u_n) .
Ficar confuso com as notações $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n}))$	Explicar que esta notação não é nova e corresponde exatamente à que foi definida e adotada a propósito das sucessões reais. A letra $\boldsymbol{f}$ apenas aparece para indicar que nos estamos a referir à imagem (pela função $\boldsymbol{f}$) do termo geral da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ e da própria sucessão, isto é, $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n}))$ representa a sucessão das imagens.
Não entender que $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n}))$ também é uma sucessão real	Recordar que uma sucessão real se define como uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, no fundo uma ordenação (infinita) de números reais. Ora a ordenação mantém-se e é definida pelos índices da sucessão de objetos, (u_n) .
Aluno não consegue construir o termo geral da sucessão imagem	Uma vez que a função f tem apenas um ramo, é linear e de domínio real, a construção do termo geral da sucessão imagem é imediata, seguindo o mesmo raciocínio que o aluno usou para determinar a imagem de cada termo da sucessão de objetos.
Dificuldade no cálculo do limite da sucessão de imagens	Dadas as características muito simples das sucessões apresentadas nesta tarefa, não é expectável que alguns alunos da turma não consigam ajudar colegas em dificuldade no apuramento do limite requerido, uma vez obtida a expressão geral da sucessão imagem.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Marcação incorreta dos pontos no gráfico da função f	Espero que pelo menos alguns alunos da turma consigam detetar e corrigir esta dificuldade, caso se venha a manifestar. Há alunos que podem confundir os eixos em que se marcam os objetos e as respetivas imagens, bem como não posicionar os pontos sobre a linha reta que define o gráfico de f

Anexo 1.1.b): Transformação da sucessão (v_n) pela função f

Tarefa 1.1.b): Transformação da sucessão $v_n = 2 - \frac{1}{n}$ pela função f (enunciado)

b)

Considera agora a sucessão (v_n) definida por $v_n = 2 - \frac{1}{n}$.

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.11

b1)

Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função f .

n	v_n	$f(v_n)$
1		
2		
3		
4		
5		

Assinala também, no gráfico da função f apresentado na **Figura 1**, os pontos de coordenadas

$$\left(v_1, f(v_1)\right),\ \left(v_2, f(v_2)\right), \ldots, \left(v_5, f(v_5)\right)$$

a2)

Obtém o termo geral da sucessão $(b_n) = \left(f(v_n)\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

Tarefa 1.1.b): Transformação da sucessão $v_n = 2 - \frac{1}{n}$ pela função f (resolução)
b1)

n	v_n	$f(v_n)$
1	1	1
2	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	2
3	$\frac{5}{3} = 1,(6)$	$\frac{7}{3} = 2,(3)$
4	$\frac{7}{4} = 1{,}75$	$\frac{5}{2} = 2{,}5$
5	$\frac{9}{5} = 1{,}8$	$\frac{13}{5} = 2{,}6$

b2)
Observando a definição de $f(x)$ conclui-se que $\boldsymbol{f(v_n) = 2.v_n - 1}$. Substituindo a expressão da sucessão u_n e simplificando obtém-se

$$\boldsymbol{b_n} = f(v_n) = 2.\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 1 = \boldsymbol{3 - \frac{2}{n}}$$

O termo geral da sucessão de imagens $(f(v_n))$, que resolvemos designar por $(\boldsymbol{b_n})$, é pois $\boldsymbol{3 - \frac{2}{n}}$.

Tal como na alínea a2), aplicando a álgebra de limites de sucessões e atendendo a que $\frac{2}{n}$ é um infinitésimo, conclui-se que

$$\mathbf{lim}\, \boldsymbol{b_n} = \lim f(v_n) = \lim\left(3 - \frac{2}{n}\right) = 3 - \lim\frac{2}{n} = \mathbf{3}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não perceber a diferença/semelhança relativamente à alínea a)	O exercício é exatamente igual, só variando a sucessão de objetos. Ou seja, agora <u>a mesma função $\boldsymbol{f}$</u> vai transformar outra sucessão, distinta (mas muito parecida) da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ anteriormente considerada

Anexo 1.1.c): Transformação da sucessão $(\boldsymbol{w_n})$ pela função $\boldsymbol{f}$

Tarefa 1.1.c): Transformação da sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pela função f (enunciado)
c) Finalmente, considera a sucessão (w_n) definida por $\boldsymbol{w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}}$.

Tarefa 1.1.c): Transformação da sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pela função f (enunciado)

c1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função f .

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.11

n	w_n	$f(w_n)$
1		
2		
3		
4		
5		

Identifica no gráfico da função f apresentado na **Figura 1**, os pontos de coordenadas

$$\left(w_1, f(w_1)\right),\ \left(w_2, f(w_2)\right), \ldots, \left(w_5, f(w_5)\right)$$

c2)
Obtém o termo geral da sucessão $(c_n) = \left(f(w_n)\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

Tarefa 1.1.c): Transformação da sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pela função f (resolução)

c1)
Os valores da tabela abaixo já foram determinados e apresentados nas duas alíneas anteriores.

n	w_n	$f(w_n)$
1	1	1
2	$\frac{5}{2} = 2{,}5$	4
3	$\frac{5}{3} = 1,(6)$	$\frac{7}{3} = 2,(3)$
4	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{7}{2} = 3{,}5$
5	$\frac{9}{5} = 1{,}8$	$\frac{13}{5} = 2{,}6$

c2)
Observando a definição de $f(x)$ conclui-se que $\boldsymbol{f(w_n) = 2.w_n - 1}$. Substituindo a expressão da sucessão w_n e simplificando obtém-se

$$c_n = f(w_n) = 2.\left[2 + \frac{(-1)^n}{n}\right] - 1 = 4 + (-1)^n.\frac{2}{n} - 1 = \boldsymbol{3 + (-1)^n.\frac{2}{n}}$$

O termo geral da sucessão de imagens $(f(w_n))$, que resolvemos designar por (c_n), é pois $\boldsymbol{3 + (-1)^n.\frac{2}{n}}$.

Tarefa 1.1.c): Transformação da sucessão $\boldsymbol{w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}}$ pela função $\boldsymbol{f}$ (resolução)
Tal como nas alíneas a1) e a2), aplicando a álgebra de limites de sucessões e atendendo a que $(-1)^n \frac{2}{n}$ também é um infinitésimo (produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada), conclui-se que $$\mathbf{lim}\, \boldsymbol{c_n} = \lim f(w_n) = \lim \left[3 + (-1)^n . \frac{2}{n}\right] = 3 + \lim \left[(-1)^n \frac{2}{n}\right] = \mathbf{3}$$ Tal como nos dois casos anteriores, o limite da sucessão das imagens é 3.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Ficar confuso com o facto da sucessão (w_n) ser oscilante	Chamar a atenção para o facto da função $\boldsymbol{f}$ ter domínio $\mathbb{R}$ e portanto transformar qualquer número real.
Repetição de cálculos já efetuados	Alertar para possíveis semelhanças entre a sucessão (w_n) e as sucessões das alíneas anteriores. A tabela pode ser preenchida a partir das duas tabelas anteriores.
Construção do termo geral da sucessão imagem	Porque não seguir exatamente os mesmos passos usados nas alíneas anteriores? Há alunos que podem preferir trabalhar com dois ramos (n par e n ímpar). Nada a opor, mas devem entender que é mais sintético, neste caso, não particionar a expressão geral da sucessão w_n

Anexo 1.2: Estudo do limite da função $\boldsymbol{f}$ no ponto de abcissa 2

Exercício 1.3: Estudo do limite da função $\boldsymbol{f}$ no ponto de abcissa 2 (enunciado)
2. Considera ainda a função $\boldsymbol{f}$ da tarefa anterior e <u>uma sucessão qualquer</u> $(\boldsymbol{x_n})$ convergente para 2. Quais das afirmações abaixo estão corretas? Justifica a tua decisão. **(A)** – A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ é convergente. **(B)** – A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ converge para 2. **(C)** – $(\boldsymbol{f(x_n)})$ não é uma sucessão. **(D)** – A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ converge para 3. **(E)** – O valor de $\boldsymbol{f(x_n)}$ não está definido para alguns valores de $\boldsymbol{x_n}$.

Exercício 1.3: Estudo do limite da função f no ponto de abcissa 2 (resolução)
As proposições (A) e (D) são as únicas corretas. Uma vez que $f(x_n) = 2.x_n - 1$, é evidente que $(f(x_n))$ é também uma sucessão e, pela álgebra dos limites, sendo (x_n) convergente, $(f(x_n))$ também será convergente. Ora se (x_n) tende para dois, $(f(x_n))$ tenderá para $2.(\lim x_n) - 1$ ou seja, para três. Quanto à alínea (E), é obviamente falsa, uma vez que o domínio da função f é $\mathbb{R}$ e a sucessão (x_n) é uma sucessão de números reais.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ pode não ser convergente	O termo geral da sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ é $\mathbf{2}\boldsymbol{x_n} + \mathbf{1}$, pelo que pela álgebra de limites de sucessões, se a sucessão (x_n) é convergente, a sucessão de imagens $(\boldsymbol{f(x_n)})$ também tem de o ser
A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ pode (<u>ou não</u>) convergir para 3	Uma sucessão ou converge ou diverge, não pode convergir e divergir ao mesmo tempo. Por outro lado, se convergir, o limite é único. Portanto a afirmação não pode estar correta.
$(\boldsymbol{f(x_n)})$ pode não ser uma sucessão	Afirmação falsa, pois $\boldsymbol{f}$ tem domínio real, pelo que todos os termos da sucessão real $(\boldsymbol{x_n})$ terão a sua imagem através da função $\boldsymbol{f}$. Desta forma, $(\boldsymbol{f(x_n)})$ é também sempre uma sucessão real
A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ tende <u>necessariamente</u> para 3	Correto, uma vez que, aplicando as regras de álgebra de limites, a sucessão de termo geral $\mathbf{2}\boldsymbol{x_n} + \mathbf{1}$ tenderá para 3 se a sucessão $(\boldsymbol{x_n})$ tender para 2 (como refere a hipótese)
Pode não ser possível determinar $\boldsymbol{f(x_n)}$	Será sempre possível determinar $\boldsymbol{f(x_n)}$, uma vez que a função $\boldsymbol{f}$ tem domínio real e qualquer termo de $(\boldsymbol{x_n})$ é por hipótese um número real

Anexo 1.3.a) e b): Transformação da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ pela função $\boldsymbol{g}$

Tarefa 1.3.a) e b): Transformação da sucessão $\boldsymbol{u_n} = 2 + \frac{1}{n}$ pela função $\boldsymbol{g}$ (enunciado)
Vamos agora repetir a **tarefa 1.** usando outra função. Considera então a função $\boldsymbol{g}$, de domínio $\mathbb{R}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} x+2, & se\ \ x < 2 \\ x-1, & se\ \ x \geq 2 \end{cases}$ Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.11

Tarefa 1.3.a) e b): Transformação da sucessão $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ pela função g (enunciado)

e representada graficamente na **Figura 2**.

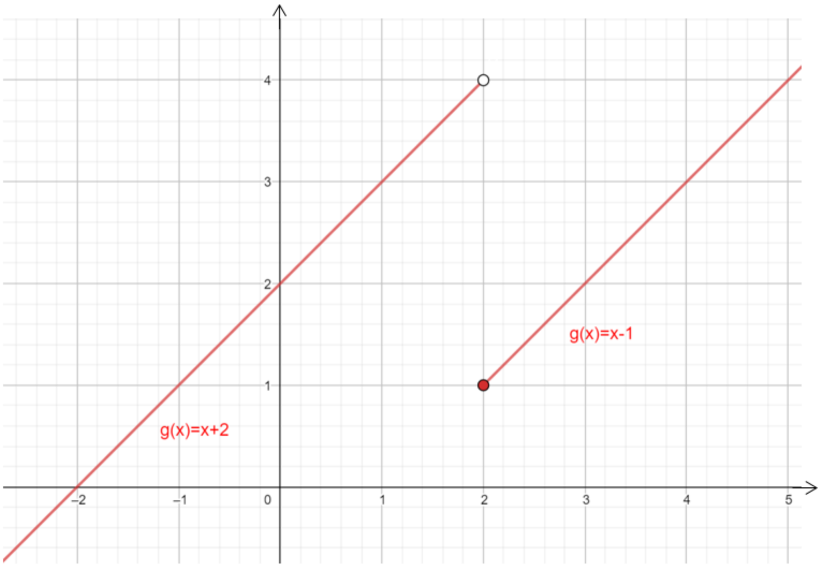


Figura 2 – Gráfico da função g

a)
Indica os valores de

g(-2) = ; **g(0)** = ; **g(2)** = ; **g(4)** =

b)
Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

b1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função g .

n	u_n	$g(u_n)$
1		
2		
3		
4		
5		

Assinala no gráfico da **Figura 2** os pontos de coordenadas

$(u_1, g(u_1)),\ (u_2, g(u_2)), \ldots, (u_5, g(u_5))$

b2)
Obtém o termo geral da sucessão $(d_n) = (g(u_n))$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

Tarefa 1.3.a) e b): Transformação da sucessão $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ pela função g (resolução)

a)
O objetivo desta alínea, inexistente na tarefa 1.1, é precisamente chamar a atenção dos alunos para as características especiais da função $\boldsymbol{g}$ e obrigá-los a deterem-se algum tempo no estudo do seu comportamento antes de prosseguirem na execução da tarefa.

Observando os dois ramos da função g , apenas a imagem do ponto de abcissa 2 pode induzir algum aluno em erro, caso opte pelo ramo errado. O gráfico da função permite também confirmar os seguintes resultados:

$$\boldsymbol{g(-2)} = -2 + 2 = 0 \qquad \boldsymbol{g(0)} = 0 + 2 = 2$$

$$\boldsymbol{g(2)} = 2 - 1 = 1 \qquad \boldsymbol{g(4)} = 4 - 1 = 3$$

b1)
A sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ é exatamente igual à usada na tarefa 1.1.a), pelo que agora apenas teremos de estar atentos às características da função $\boldsymbol{g}$, ou seja, apenas teremos de preencher a terceira coluna da tabela.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{u_n}$	$\boldsymbol{g(u_n)}$
1	3	2
2	$\frac{5}{2} = 2{,}5$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
3	$\frac{7}{3} = 2,(3)$	$\frac{4}{3} = 1,(3)$
4	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{5}{4} = 1{,}25$
5	$\frac{11}{5} = 2{,}2$	$\frac{6}{5} = 1{,}2$

b2)
Observando a definição de $g(x)$ conclui-se que $\boldsymbol{g(u_n) = u_n - 1}$, uma vez que a sucessão (u_n) tende para dois por valores (sempre) superiores a dois. Substituindo a expressão da sucessão u_n e simplificando obtém-se

$$\boldsymbol{d_n} = g(u_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \boldsymbol{1 + \frac{1}{n}}$$

O termo geral da sucessão de imagens $(g(u_n))$, que resolvemos designar por $(\boldsymbol{d_n})$, é pois $\boldsymbol{1 + \frac{1}{n}}$.

Finalmente, aplicando a álgebra de limites de sucessões e atendendo a que $\frac{1}{n}$ é um infinitésimo, conclui-se que

$$\boldsymbol{\lim d_n} = \lim g(u_n) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim\frac{1}{n} = \boldsymbol{1}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Baralhar-se em vista de a função $\boldsymbol{g}$ apresentar dois ramos distintos	Ambos os ramos representam funções lineares muito simples, pelo que será fácil à turma esclarecer qualquer dúvida de um colega. Pode haver falta de atenção na identificação do ramo a que pertence a imagem do ponto de abcissa 2.
Não se aperceber que todos os termos da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ caem sob o mesmo ramo da função $\boldsymbol{g}$	Pedir aos alunos para indicarem no gráfico e na expressão de $\boldsymbol{g}$ as imagens dos primeiros termos de $(\boldsymbol{u_n})$ e constatar que 2 é um minorante dos termos da sucessão
Não conseguir chegar ao termo geral de $(g(u_n))$ ou não determinar o respetivo limite	Tentar de novo que algum aluno da turma vislumbre que, para a sucessão u_n apenas se aplica um dos ramos da função g. O resto do raciocínio é em tudo análogo ao efetuado na tarefa 1.1.a) já explorada e resolvida

Anexo 1.3.c): Transformação da sucessão $(\boldsymbol{v_n})$ pela função $\boldsymbol{g}$

Tarefa 1.3.c): Transformação da sucessão $\boldsymbol{v_n = 2 - \frac{1}{n}}$ pela função $\boldsymbol{g}$ (enunciado)

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.11

c)
Considera agora a sucessão (v_n) definida por $\boldsymbol{v_n = 2 - \frac{1}{n}}$.

c1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função $\boldsymbol{g}$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{v_n}$	$\boldsymbol{g(v_n)}$
1		
2		
3		
4		
5		

Assinala também, no gráfico da função g apresentado na **Figura 2**, os pontos de coordenadas

$$(v_1, g(v_1)),\ (v_2, g(v_2)), \ldots, (v_5, g(v_5))$$

c2)
Obtém o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{e_n}) = \left(\boldsymbol{g(v_n)}\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

Tarefa 1.3.c): Transformação da sucessão $\boldsymbol{v_n = 2 - \frac{1}{n}}$ pela função $\boldsymbol{g}$ (resolução)

c1)
A sucessão $(\boldsymbol{v_n})$ é exatamente a mesma referida na tarefa 1.1.b), pelo que agora apenas teremos de determinar os valores a colocar na terceira coluna da tabela.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{v_n}$	$\boldsymbol{g(v_n)}$
1	1	3
2	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{7}{2} = 3{,}5$
3	$\frac{5}{3} = 1,(6)$	$\frac{11}{3} = 3,(6)$
4	$\frac{7}{4} = 1{,}75$	$\frac{15}{4} = 3{,}75$
5	$\frac{9}{5} = 1{,}8$	$\frac{19}{5} = 3{,}8$

c2)
Observando a definição de $g(x)$ conclui-se que $\boldsymbol{g(v_n) = v_n + 2}$, já que a sucessão (v_n) tende para dois por valores (sempre) inferiores a dois. Substituindo a expressão da sucessão v_n e simplificando obtém-se

$$\boldsymbol{e_n} = g(v_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right) + 2 = \boldsymbol{4 - \frac{1}{n}}$$

O termo geral da sucessão de imagens $(g(v_n))$, que resolvemos designar por $(\boldsymbol{e_n})$, é pois $\boldsymbol{4 - \frac{1}{n}}$.

Finalmente, aplicando a álgebra de limites de sucessões e atendendo a que $\frac{1}{n}$ é um infinitésimo, conclui-se que

$$\boldsymbol{\lim e_n} = \lim g(v_n) = \lim\left(4 - \frac{1}{n}\right) = 4 - \lim\frac{1}{n} = \boldsymbol{4}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
No se aperceber que todos os termos da sucessão de objetos $(\boldsymbol{v_n})$ ficam sob o mesmo ramo da função $\boldsymbol{g}$	Mostrar que a nova sucessão tem agora 2 como majorante, pelo que se deve usar o ramo esquerdo da função $\boldsymbol{g}$. Salientar também que os termos da sucessão nunca atingem o valor 2
Não conseguir chegar ao termo geral de $(g(v_n))$ ou não determinar o respetivo limite	Proceder como na alínea anterior, levando os alunos a concluir que o raciocínio é basicamente o mesmo já aplicado na tarefa 1.1.b)

Anexo 1.3.d): Transformação da sucessão (w_n) pela função g.

Tarefa 1.3.d): Transformação da sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pela função g (enunciado)

d)

Finalmente, considera a sucessão (w_n) definida por $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

d1)

Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função g .

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.11

n	w_n	$g(w_n)$
1		
2		
3		
4		
5		

Identifica, no gráfico da função g apresentado na **Figura 2**, os pontos de coordenadas

$$(w_1, g(w_1)),\ (w_2, g(w_2)), \dots, (w_5, g(w_5))$$

d2)

Obtém o termo geral da sucessão $(i_n) = \left(g(w_n)\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

Tarefa 1.3.d): Transformação da sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pela função g (resolução)

d1)

Tal como já observado na tarefa 1.1.c), os pontos determinados pela sucessão w_n são os mesmos já calculados para uma das sucessões, u_n ou v_n, conforme n é par ou ímpar, respetivamente. Basta assim identificar os valores nas tabelas construídas nas alíneas 1.3.b) e 1.3.c) acabadas de resolver.

n	w_n	$g(w_n)$
1	1	3
2	$\frac{5}{2} = 2{,}5$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
3	$\frac{5}{3} = 1,(6)$	$\frac{11}{3} = 3,(6)$
4	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{5}{4} = 1{,}25$
5	$\frac{9}{5} = 1{,}8$	$\frac{19}{5} = 3{,}8$

Tarefa 1.3.d): Transformação da sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pela função g (resolução)

d2)

Esta alínea introduz maior complexidade relativamente quer às tarefa 1.1 e 1.2, quer às alíneas 1.3.b2) e 1.3.c2), uma vez que, como veremos, não será possível apresentar o termo geral da sucessão $g(w_n)$ numa única expressão.

De facto, partindo da expressão com dois ramos com que caracterizámos a função g

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & se \;\; x < 2 \\ x-1, & se \;\; x \geq 2 \end{cases}$$

é possível definir $g(w_n)$ por qualquer das expressões seguintes, todas equivalentes entre si:

$$g(w_n) = \begin{cases} w_n+2, & se \;\; w_n < 2 \\ w_n-1, & se \;\; w_n \geq 2 \end{cases}$$

ou (notar que $w_n < 2$ apenas quando n é ímpar)

$$g(w_n) = \begin{cases} w_n+2, & se \;\; n\, ímpar \\ w_n-1, & se \;\; n\, par \end{cases}$$

ou [atender a que quando n é ímpar temos $g(w_n) = g(v_n)$, verifica!]

$$g(w_n) = \begin{cases} g(v_n), & se \;\; n\, ímpar \\ g(u_n), & se \;\; n\, par \end{cases}$$

ou (pelo que vimos nas duas alíneas anteriores)

$$i_n = g(w_n) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{n}, & se \;\; n\, ímpar \\ 1 + \frac{1}{n}, & se \;\; n\, par \end{cases}$$

sendo esta última expressão o termo geral da sucessão de imagens $(g(w_n))$, que resolvemos designar por $(\boldsymbol{i_n})$.

Finalmente, aplicando a álgebra de limites de sucessões e atendendo a que $\frac{1}{n}$ é um infinitésimo, conclui-se que a sucessão de imagens $g(w_n)$ – a que chamámos i_n – não tem limite, uma vez que as subsucessões de termos pares e ímpares não têm o mesmo limite: A subsucessão de termos ímpares tem limite igual a 4 e a subsucessão de termos pares tem limite igual a 1. Isto mesmo pode inferir-se do gráfico da função g , considerando sucessões de objetos tendentes para 2 com todos os termos à esquerda ou à direita de dois. Qualquer sucessão com todos os termos à esquerda (do limite 2) terá uma sucessão imagem tendente para 4, enquanto qualquer sucessão com todos os termos à direita do mesmo limite terá a sua sucessão imagem tendente para 1.

Conclusão: a sucessão (i_n), imagem (pela função g) da sucessão convergente (w_n) é divergente.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Ficar confuso com o facto da sucessão (w_n) ser oscilante em torno do valor 2	O facto de os termos da sucessão estarem alternadamente acima e abaixo do valor 2, implica que se usem também de forma alternada os dois ramos da função $\boldsymbol{g}$ para determinar as respetivas imagens
Repetição de cálculos já efetuados	Os alunos já deverão ter percebido durante a execução da tarefa 1 que os resultados desta alínea podem ser repescados das duas alíneas anteriores
Aluno não consegue construir o termo geral da sucessão imagem	Esta é a maior dificuldade da tarefa, uma vez que será necessário considerar dois ramos no termo geral, tal como sucedia para a sucessão $(\boldsymbol{w_n})$, conforme a ordem for ímpar ou par. Isto em virtude das imagens de termos sucessivos de $(\boldsymbol{w_n})$ caírem em ramos diferentes da função $\boldsymbol{g}$
Dificuldade no cálculo do limite de uma sucessão de imagens	A sucessão $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w_n}))$ não irá ter limite, uma vez que a sua subsucessão de índices ímpares converge para 4 e a de índices pares converge para $g(2) = 1$. Será útil pedir aos alunos que sigam dinamicamente no gráfico o posicionamento dos pontos sucessivos da sucessão $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w_n}))$
Duas sucessões podem ter limites iguais e as suas imagens limites diferentes (ou não terem limite)	É uma das conclusões que se pretende atingir desta tarefa. As sucessões $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$ têm o mesmo limite, mas as sucessões imagens pela função $\boldsymbol{g}$ têm limites diferentes. Já a sucessão imagem, pela mesma função, da sucessão $(\boldsymbol{w_n})$ não tem limite
As sucessões $\boldsymbol{u_n}$ e $\boldsymbol{v_n}$ não são subsucessões da sucessão $\boldsymbol{w_n}$	Basta reparar por exemplo que os termos de ordem ímpar de $\boldsymbol{u_n}$ ou os termos de ordem par de $\boldsymbol{v_n}$ não são termos de $\boldsymbol{w_n}$

Anexo 1.4.a): Estudo do limite da função g no ponto de abcissa 2

Exercício 1.4.a): Estudo do limite da função g no ponto de abcissa 2 (enunciado)
4. Comenta as seguintes afirmações, ainda em relação à função $\boldsymbol{g}$ estudada na tarefa anterior: **a)** Se uma sucessão $(t_n) \to 2$, então $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t_n})) \to \boldsymbol{g}(\mathbf{2})$.

Exercício 1.4.a): Estudo do limite da função g no ponto de abcissa 2 (resolução)
A afirmação está obviamente errada. Vimos, na tarefa 3., dois exemplos que contrariam a proposição: a sucessão $(\boldsymbol{g(v_n)})$ tendia para 4 e a sucessão $(\boldsymbol{g(w_n)})$ não tinha limite. Por simples observação do gráfico da função $\boldsymbol{g}$ pode concluir-se que qualquer sucessão de objetos que tenda para 2 por valores inferiores a 2, terá uma correspondente sucessão de imagens com limite 4, isto é, diferente de $g(2) = 1$.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não perceber a notação usada	Descodificar a notação, explicando por palavras o que ela significa. Mas recordar aos alunos que estamos a usar notação rigorosa e que já foi apresentada aquando do estudo das sucessões. A novidade está em representar a sucessão das imagens pela função $\boldsymbol{f}$ na notação conhecida para sucessões $(\boldsymbol{f(x_n)})$
Aluno acha a afirmação correta	Recordo que acabámos de estudar dois contraexemplos da afirmação, precisamente as sucessões $(\boldsymbol{g(v_n)})$ e $(\boldsymbol{g(w_n)})$
Será que $\boldsymbol{h(t_n)}$ existe sempre?	No caso das funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ o problema não se colocava porque ambas tinham domínio $\mathbb{R}$. No entanto é evidente que tem sempre de haver o cuidado de verificar se todos os termos da sucessão $(\boldsymbol{t_n})$ pertencem ao domínio da função $\boldsymbol{h}$, uma vez que só esses terão imagem através da função

Anexo 1.4.b): Estudo do limite da função g no ponto de abcissa 3

Exercício 1.4.b): Estudo do limite da função g no ponto de abcissa 3 (enunciado)
4. Comenta as seguintes afirmações, ainda em relação à função $\boldsymbol{g}$ estudada na tarefa anterior: **b)** Se uma sucessão $(z_n) \to 3$, então $(\boldsymbol{g(z_n)}) \to \boldsymbol{g(3)}$.

Exercício 1.4.b): Estudo do limite da função g no ponto de abcissa 3 (resolução)
A afirmação está correta. Sabemos que, qualquer que seja a sucessão $(\boldsymbol{z_n})$, é sempre possível construir uma sua subsucessão com todos os termos superiores ou iguais a 2

Exercício 1.4.b): Estudo do limite da função $\boldsymbol{g}$ no ponto de abcissa 3 (resolução)
(repara que existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são superiores ou iguais a 2). Designemos o termo geral desta subsucessão (que tende obrigatoriamente para 3) por $\boldsymbol{s_n}$. Ora, observando o gráfico da função $\boldsymbol{g}$, concluímos que $$\mathbf{lim}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{s_n}) = \lim(s_n - 1) = \lim s_n - 1 = 3 - 1 = 2 = \boldsymbol{g}(\mathbf{3})$$ A subsucessão $(\boldsymbol{s_n})$ apenas difere de $(\boldsymbol{z_n})$ por um número finito de termos. O mesmo sucederá para a subsucessão $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s_n}))$ da sucessão de imagens $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z_n}))$. Finalmente, sabemos do que estudámos das sucessões que, sendo $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s_n}))$ convergente (como mostrámos acima), a sucessão $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z_n}))$ tem também de ser convergente e para o mesmo limite de $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s_n}))$. Ou seja, necessariamente, $$(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z_n})) \to \boldsymbol{g}(\mathbf{3})$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não se preveem dificuldades diferentes das já apresentadas e comentadas	Uma vez que $\boldsymbol{g}(\mathbf{3})$ corresponde a um ponto 'interior' a um dos ramos da função $\boldsymbol{g}$ e que, para efeitos da determinação do limite de uma sucessão, apenas interessa observar o comportamento dos termos numa vizinhança do valor limite em análise, é evidente (por exemplo observando o gráfico de $\boldsymbol{g}$) que a afirmação é verdadeira.
E se alguns termos de $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z_n}))$ não caírem no ramo 'direito' da função $\boldsymbol{g}$?	Recordar o que foi estudado sobre as propriedades das sucessões e limite de uma sucessão. O facto de $(\boldsymbol{z_n}) \to \mathbf{3}$, obriga a que, a partir de certa ordem, todos os termos de $(\boldsymbol{z_n})$ estejam próximos de 3 tanto quanto queiramos. E isso implica que, para esses termos$(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z_n}))$ caia na parte 'direita' do gráfico da função $\boldsymbol{g}$. Por outro lado, o limite de uma sucessão não depende nunca dos valores de um número finito de termos da mesma, sejam eles quais forem. É aliás por isso que qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente e para o mesmo limite da sucessão de partida.

Anexo 1.5: Ficha de Trabalho nº 1

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Matemática A - 11º Ano - Turma 11º E - Ano Letivo 2018/2019

Limites de Funções Reais de Variável Real

Grupo de Trabalho: ________________________ / ________________________ / ________________

1.
Seja $\boldsymbol{f}$ a função de domínio $\mathbb{R}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = 2x - 1}$.

a)
Considera a sucessão (u_n) definida por $\boldsymbol{u_n = 2 + \frac{1}{n}}$.

a1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função $\boldsymbol{f}$.

n	u_n	$f(u_n)$
1		
2		
3		
4		
5		

No referencial da **Figura 1** está representado o gráfico da função $\boldsymbol{f}$. Assinala no gráfico os pontos de coordenadas

$$\left(u_1, f(u_1)\right),\ \left(u_2, f(u_2)\right), \ldots, \left(u_5, f(u_5)\right)$$

a2)
Obtém o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{a_n}) = \left(\boldsymbol{f(u_n)}\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

b)
Considera agora a sucessão (v_n) definida por $\boldsymbol{v_n = 2 - \frac{1}{n}}$.

b1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função $\boldsymbol{f}$.

n	v_n	$f(v_n)$
1		
2		
3		
4		
5		

Assinala também, no gráfico da função $\boldsymbol{f}$ apresentado na **Figura 1**, os pontos de coordenadas

$$\left(v_1, f(v_1)\right),\ \left(v_2, f(v_2)\right), \ldots, \left(v_5, f(v_5)\right)$$

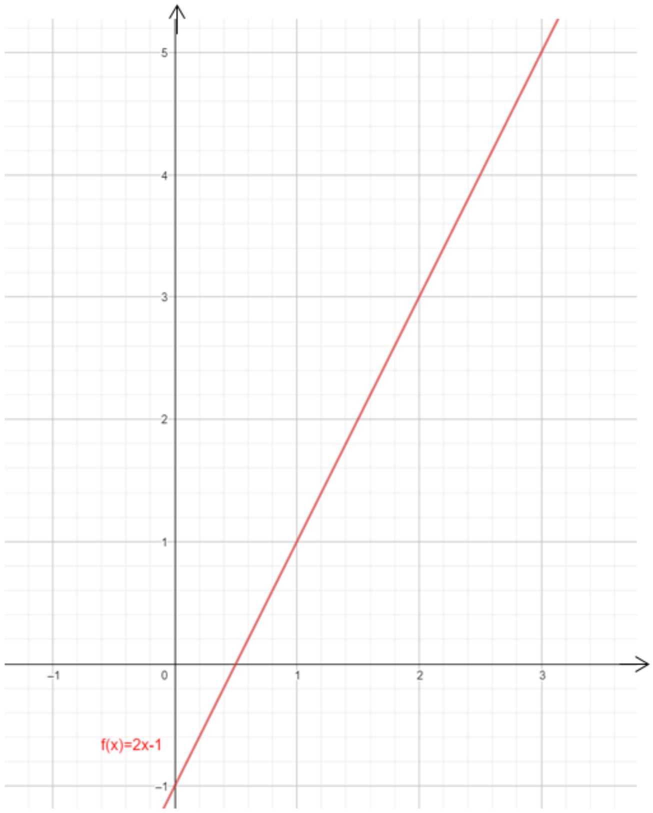


Figura 1 – Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = 2x - 1}$

b2)
Obtém o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{b_n}) = (\boldsymbol{f(v_n)})$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

c)
Finalmente, considera a sucessão (w_n) definida por $\boldsymbol{w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}}$.

c1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função $\boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{w_n}$	$\boldsymbol{f(w_n)}$
1		
2		
3		
4		
5		

Identifica, no gráfico da função $\boldsymbol{f}$ apresentado na **Figura 1**, os pontos de coordenadas

$$(w_1, f(w_1)),\ (w_2, f(w_2)), \ldots, (w_5, f(w_5))$$

c2)
Obtém o termo geral da sucessão $(c_n) = \left(f(w_n)\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

2.
Considera ainda a função f da tarefa anterior e <u>uma sucessão qualquer</u> (x_n) convergente para 2. Quais das afirmações abaixo estão corretas? Justifica a tua decisão.

(A) – A sucessão $(f(x_n))$ é convergente.

(B) – A sucessão $(f(x_n))$ converge para 2.

(C) – $(f(x_n))$ não é uma sucessão.

(D) – A sucessão $(f(x_n))$ converge para 3.

(E) – O valor de $f(x_n)$ não está definido para alguns valores de x_n .

3.
Vamos agora repetir a **tarefa 1.** usando outra função. Considera então a função g , de domínio $\mathbb{R}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x<2 \\ x-1, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

e representada graficamente na **Figura 2**.

a)
Indica os valores de

g(-2) = ; **g(0) =** ; **g(2) =** ; **g(4) =**

b)
Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

b1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função g .

n	u_n	$g(u_n)$
1		
2		
3		
4		
5		

Assinala no gráfico de g na **Figura 2** os pontos de coordenadas

$$\left(u_1, g(u_1)\right),\ \left(u_2, g(u_2)\right), \ldots, \left(u_5, g(u_5)\right)$$

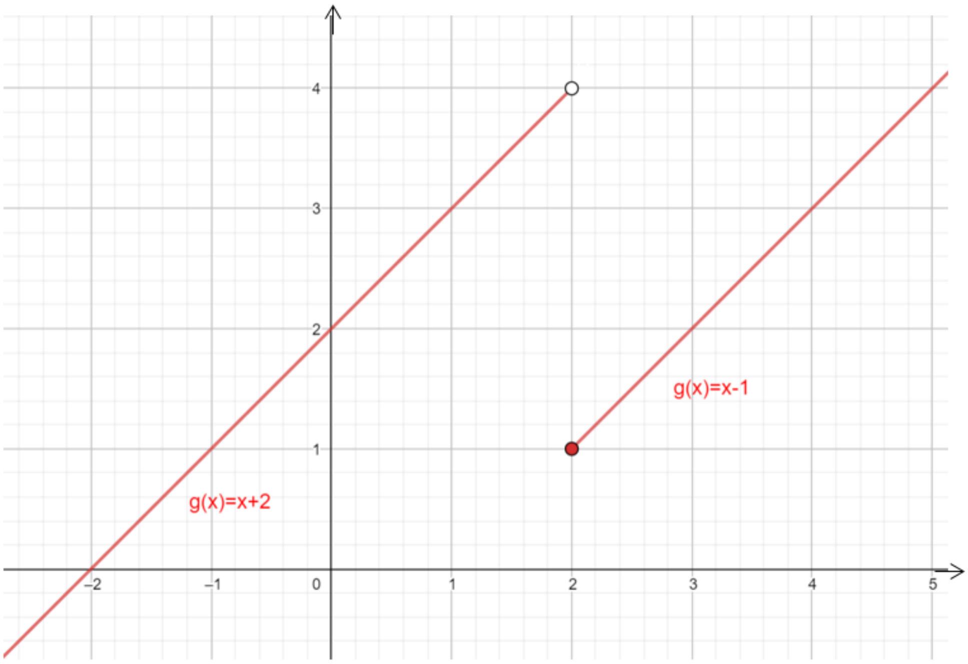


Figura 2 – Gráfico da função $\boldsymbol{g}$

b2)
Obtém o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{d_n}) = (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_n}))$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

c)
Considera agora a sucessão (v_n) definida por $\boldsymbol{v_n = 2 - \frac{1}{n}}$.

c1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função $\boldsymbol{g}$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{v_n}$	$\boldsymbol{g(v_n)}$
1		
2		
3		
4		
5		

Assinala também, no gráfico da função $\boldsymbol{g}$ apresentado na **Figura 2**, os pontos de coordenadas

$$(v_1, g(v_1)),\ (v_2, g(v_2)), \ldots, (v_5, g(v_5))$$

Grupo Trabalho: ______ / ______ / ______

c2)
Obtém o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{e_n}) = \left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v_n})\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

d)
Finalmente, considera a sucessão (w_n) definida por $\boldsymbol{w_n} = \mathbf{2} + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}$.

d1)
Preenche a tabela abaixo, calculando os termos da sucessão e as respetivas imagens pela função $\boldsymbol{g}$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{w_n}$	$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w_n})$
1		
2		
3		
4		
5		

Identifica, no gráfico da função $\boldsymbol{g}$ apresentado na **Figura 2**, os pontos de coordenadas

$$\left(w_1, g(w_1)\right),\ \left(w_2, g(w_2)\right), \ldots, \left(w_5, g(w_5)\right)$$

d2)
Obtém o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{i_n}) = \left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w_n})\right)$ e determina, caso exista, o respetivo limite.

4.
Comenta as seguintes afirmações, ainda em relação à função $\boldsymbol{g}$ estudada na tarefa anterior:

a)
Se uma sucessão $(t_n) \to 2$, então $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t_n})) \to \boldsymbol{g}(\mathbf{2})$.

b)
Se uma sucessão $(z_n) \to 3$, então $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z_n})) \to \boldsymbol{g}(\mathbf{3})$.

Anexo 2: Plano de Aula 2

Plano de Aula - 12 de março de 2019

Matemática A

Domínio: Funções Reais de Variável Real
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Sumário (2 tempos = 90 minutos)
▪ Exercícios de consolidação sobre definição de limite, segundo Heine, de uma função real de variável real

Objetivos
▪ Aplicar e consolidar a definição de limite segundo Heine na decisão da existência de limite num ponto (aderente ao domínio) de uma função real de variável real

Conhecimentos Prévios
▪ Noção de limite de uma sucessão e respetivas propriedades operatórias ('álgebra dos limites'); ▪ Representação gráfica de funções e treino na interpretação e análise dos gráficos; ▪ Definição de limite num ponto de uma função real de variável real, segundo Heine.

Capacidades Transversais
▪ Raciocínio Matemático, formular conjeturas e desenvolver curiosidade em as testar ou tentar comprovar ▪ Comunicação Matemática, oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, explicando raciocínios e apresentando conclusões de forma clara e rigorosa ▪ Sempre que possível, procurar utilizar a Matemática para melhor compreender o mundo e a realidade que nos rodeia ▪ Trabalhar em grupo, aproveitando sinergias geradas pela colaboração e cooperação

Metodologia de Trabalho
▪ Turma organizada em grupos de trabalho de dois ou três alunos; ▪ Proposta de alguns exercícios, de tipologia diversa (escolha múltipla, comentário a resolução, questões diretas), direcionados para a aplicação da definição de limite de uma função segundo Heine; ▪ Acompanhamento do trabalho autónomo desenvolvido pelos grupos, com vista a evitar bloqueamento de progressão na resolução das questões propostas e permitir a identificação de cenários reais interessantes para apresentação a toda a turma.

Metodologia de Trabalho
▪ Discussão de resoluções selecionadas com toda a turma, sistematização de resultados e conclusões ▪ Fomentar a intervenção equilibrada dos alunos nos trabalhos e debates em aula, procurando que todos participem e se sintam parte integrante do grupo

Avaliação
▪ A produção dos alunos será analisada e avaliada através de gravação áudio e fotos da atividade de resolução de alguns grupos de trabalho ▪ Serão igualmente registadas notas de campo baseadas na atividade e comportamento geral da turma em aspetos como o Pontualidade; o Interesse e participação nas atividades propostas; o Cooperação e espírito de entreajuda no trabalho em grupo; o Aplicação e integração de conhecimentos anteriores nos novos conteúdos; o Utilização correta de simbologia e linguagem matemática; o Comportamento em sala de aula ▪ O tópico dos limites será concluído com a realização de um miniteste de avaliação sumativa, de 20 minutos de duração, tal como tem acontecido na lecionação de conteúdos anteriores. O miniteste ocorrerá no final da aula número 6

Recursos
▪ Por parte do **Professor**: o Canetas de cores distintas (mínimo 2 cores); o Manual da disciplina adotado pela escola (volume 3); o Tarefas e exercícios a propor aos alunos (Ficha de Trabalho nº 2) ▪ Por parte do **Aluno**: o Caderno diário de apontamentos; o Calculadora gráfica

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Início da aula com síntese das conclusões da aula anterior	
▪ Apresentação da definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine	5
▪ Distribuição da ‘Ficha de Trabalho nº 2’, solicitando à turma a resolução dos exercícios 1 e 2	5
▪ Início da resolução pela turma, em grupos de trabalho autónomo de dois ou três alunos	10

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 1 com discussão para esclarecimento de dúvidas	5
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 2.a) com discussão para esclarecimento de dúvidas	5
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 2.b) com discussão para esclarecimento de dúvidas. Conclusões	5-10
▪ Prosseguir com a resolução autónoma dos exercícios 3, 4 e 5 da ficha de trabalho	10-15
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 3 com discussão para esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 4 com discussão para esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 5, alíneas a) e b), com discussão para esclarecimento de dúvidas	10
▪ A alínea 5.c) servirá de mote para uma síntese da aula, antes do respetivo encerramento	5

Desenvolvimento da Aula

- ***Início da aula com síntese das conclusões da aula anterior e distribuição da Ficha de Trabalho nº 2***

A aula começa recordando a definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine. Segue-se a distribuição da ficha de exercícios a executar na aula, em que o tema fundamental será precisamente a aplicação da referida definição. A ficha é encabeçada pelo texto da definição de Heine, acompanhado de uma representação gráfica sugestiva. Pede-se aos alunos que comecem por se concentrar nos exercícios 1 e 2 da ficha de trabalho.

- ***Início da resolução da ficha de trabalho pela turma, em grupos de trabalho autónomo de dois ou três alunos***

Os grupos de trabalho iniciam a resolução da ficha de trabalho. O Professor deambula pela sala, respondendo a eventuais questões que lhe sejam colocadas pelos alunos. Se algum grupo conseguir resolver os dois exercícios, será convidado a prosseguir para o exercício seguinte.

Ao seguir as diferentes resoluções e observar dificuldades, o Professor selecionará algumas resoluções para resolução no quadro e discussão com a participação de toda a turma.

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão (exercícios 1 e 2)***

Desenvolvimento da Aula
Os exercícios 1 e 2 são complementares, partindo um da premissa de que existe limite da função e o outro questionando a respetiva existência a partir de informação sobre o limite de algumas sucessões. Por isso, embora se tratem separadamente as respetivas resoluções, haverá a preocupação evidenciar aos alunos as duas perspetivas. Tratando-se de questões de escolha múltipla, não só se justificará a resposta correta como se discutirá a razão de rejeição de cada uma das alternativas. Convidarei um aluno de cada um dos grupos previamente selecionados durante a observação da resolução autónoma para apresentar a sua solução no quadro, perante a turma. Seguir-se-á discussão, com colocação de dúvidas pelos alunos. Far-se-á apelo à definição de Heine na argumentação usada na justificação das respostas. No final do exercício 2 será altura de efetuar uma primeira síntese do tema fundamental da aula (aplicação da definição de Heine na determinação da existência de limite de uma função real de variável real). ▪ ***<u>Resolução (seguida de discussão) dos exercícios 3 e 4 da ficha de trabalho</u>*** O exercício 3 segue ainda a mesma linha diretriz dos dois exercícios anteriores, ainda que agora se trate de identificar a sucessão que objetos que conduz a determinado limite e a função ***f*** seja conhecida. A questão 4 é de tipologia diferente e também a primeira que exige, ainda que de forma não explícita, que o aluno aplique a definição de limite segundo Heine. Propositadamente, omite-se o gráfico da função em análise, descontínua no ponto de abcissa 2. Neste exercício pede-se ao aluno que comente um texto que conclui que a função tem limite naquele ponto. O erro na argumentação é bastante subtil, permitindo uma discussão interessante com a turma sobre a relação entre o limite num ponto e o valor da função nesse mesmo ponto. Seguir-se-á a metodologia a que os alunos estão habituados. Um aluno apresentará a sua resolução no quadro, seguida de debate com toda a turma e esclarecimento de dúvidas. Aproveitar-se-á as características do exercício 4 para chamar a atenção da importância do rigor da linguagem na expressão matemática, seja escrita seja oral. ▪ ***<u>Resolução e discussão do exercício 5 da ficha de trabalho</u>*** O exercício 5 não oferece qualquer dificuldade especial, destinando-se a treinar os alunos no formalismo associado à aplicação de uma definição ou utilização de um teorema. No caso, pretende-se que os alunos determinem dois limites simples (nas alíneas **a** e **b**) recorrendo diretamente à definição de Heine. A parte operatória é simples e sai diretamente da ‘álgebra de limites’ já aprendida para as sucessões. ▪ ***<u>Encerramento da aula</u>*** Antes de encerrar a aula, confrontarei a turma com o exercício da alínea 5.c), onde se generaliza o limite de uma função num ponto qualquer aderente ao seu domínio. Não prevejo que a turma tenha dificuldades em aplicar a generalização, já que é consequência direta do que aplicou nas alíneas a) e b) do referido exercício. Farei então uma breve síntese da aula, relembrando a definição de Heine e forma de a utilizar na decisão sobre a existência de limite de uma função num ponto, nomeadamente a identificação de contraexemplos que permitam concluir que o limite não existe.

Anexo 2.1: Limite de sucessão, existindo limite da função

Exercício 2.1: Limite de sucessão, existindo limite da função (enunciado)
Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e seja (x_n) a sucessão definida por $x_n = \frac{1}{n+1}$ Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$. Indica qual a proposição verdadeira, justificando a tua escolha. Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.13 **(A)** – A sucessão $(f(x_n))$ não é convergente. **(B)** – A sucessão $(f(x_n))$ tende para 1. **(C)** – A sucessão $(f(x_n))$ tende para 2. **(D)** – A sucessão $(f(x_n))$ é um infinitésimo.

Exercício 2.1: Limite de sucessão, existindo limite da função (resolução)
(A) - Falso Pela definição de Heine, a sucessão imagem de qualquer infinitésimo terá de tender para 2. Portanto $(f(x_n))$ tem de ser convergente (e convergir para 2) **(B) - Falso** Ver (A) **(C) - Verdadeiro** Ver (A) **(D) - Falso** Ver (A). $(f(x_n))$ é efetivamente convergente mas tem de tender para 2

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não perceber que $(f(x_n))$ é também uma sucessão	Este assunto já foi abordado na Ficha de Trabalho nº 1. Será provavelmente suficiente apresentar a igualdade $a_n = f(x_n)$, para ilustrar ao aluno que estamos perante uma correspondência entre o conjunto dos naturais e o conjunto $\mathbb{R}$ (isto é, precisamente uma sucessão real)
Dificuldades em entender a notação usada	Clarificar que $a_n = f(x_n)$, $(a_n) = (f(x_n))$ e que $\left(f(x_n)\right) \to 1$ é o mesmo que $\lim f(x_n) = 1$. Insistir que os alunos devem distinguir claramente a notação de termo (geral) de uma sucessão da sucessão propriamente dita (que é um conjunto)

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Relacionar o exercício a com a definição de Heine	Este é o principal objetivo do exercício. Explicar que a existência de limite obriga a que não possa existir qualquer sucessão contraexemplo e desenvolver o raciocínio de resolução a partir daí
Confundir (ou não distinguir claramente) a sucessão de objetos com a sucessão de imagens	Esta dificuldade poderá estar na origem da escolha da opção D como correta. Mostrar ao aluno que se trata de sucessões distintas, tal como sucede em qualquer função, onde o objeto e a respetiva imagem (transformado pela função) são conceitos distintos
Aluno não tem presente o conceito de sucessão convergente ou a definição de infinitésimo	Relembrar o que foi aprendido a respeito das sucessões reais e chamar a atenção para a necessidade de relacionar os diferentes temas e domínios na matemática

Anexo 2.2.a): Limite da função, conhecidos limites de sucessões

Exercício 2.2.a): Limite da função, conhecidos limites de sucessões (enunciado)
Sejam $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$ as sucessões de termos gerais, respetivamente, $\boldsymbol{\frac{n+1}{n}}$ e $\boldsymbol{\frac{n-1}{n}}$, e seja $\boldsymbol{f}$ uma função real de variável real com domínio $\mathbb{R}$. Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.13 **a)** Sabe-se que $\boldsymbol{\left(f(u_n)\right) \to 0}$ e que $\boldsymbol{\left(f(v_n)\right) \to 2}$. O que se pode concluir acerca da existência de $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)}$? Qual das afirmações abaixo está correta? Justifica a tua decisão. **(A)** – A função $\boldsymbol{f(x)}$ não tem limite real quando $\boldsymbol{x \to 1}$. **(B)** – $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ **(C)** – $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ **(D)** – $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

Exercício 2.2.a): Limite da função, conhecidos limites de sucessões (resolução)
(A) - Verdadeiro A função não pode ter limite no ponto 1, uma vez que se identificaram duas sucessões de objetos tendentes para 1 cujas sucessões imagem têm limites distintos **(B) - Falso**

Exercício 2.2.a): Limite da função, conhecidos limites de sucessões (resolução)
Ver (A). Esta resposta está duplamente errada, já que o limite da função, a existir, nunca poderia ser 1, dado termos duas sucessões de imagens que não tendem para esse valor **(C) - Falso** Ver (A) **(C) - Falso** Ver (A)

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não conseguir utilizar a definição de Heine	Se existem sucessões de imagens com limites diferentes, tendo as sucessões de objetos o mesmo limite, 1, então não pode existir limite da função no ponto 1
Não identificar corretamente a hipótese ou ficar confuso pelo facto da função $\boldsymbol{f}$ não ser concretizada	Reler o enunciado e concluir que a informação disponível sobre a função f é suficiente para decidir que existe uma resposta que está correta

Anexo 2.2.b): Limite da função, conhecidos limites de sucessões

Exercício 2.2.b): Limite da função, conhecidos limites de sucessões (enunciado)
Sejam $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$ as sucessões de termos gerais, respetivamente, $\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{n}}$ e $\frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}}$, e seja $\boldsymbol{f}$ uma função real de variável real com domínio $\mathbb{R}$. Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.13 **b)** Considera agora que $\left(\boldsymbol{f(u_n)}\right) \to \boldsymbol{2}$ e $\left(\boldsymbol{f(v_n)}\right) \to \boldsymbol{2}$. O que se pode concluir acerca da existência de $\lim\limits_{x\to 1} \boldsymbol{f(x)}$? Indica, justificando, qual a resposta correta. **(A)** – Se a função $\boldsymbol{f(x)}$ tiver limite quando $\boldsymbol{x \to 1}$, esse limite terá de ser 2. **(B)** – $\lim\limits_{x\to 1} \boldsymbol{f(x)}$ não existe. **(C)** – $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$ **(D)** – $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

Exercício 2.2.b): Limite da função, conhecidos limites de sucessões (resolução)
(A) - Verdadeiro Não se pode concluir que o limite da função seja exista, uma vez que apenas temos informação sobre duas sucessões objeto (e respetivas imagens). Mas podemos afirmar que, se o limite existir, terá obrigatoriamente de ser igual a 2, uma vez que é esse o limite de cada uma das sucessões imagem apresentadas no enunciado **(B) - Falso** Ver (A). Não temos informação que nos permita concluir se o limite indicado existe ou não. Apenas sabemos, pelas condições expressas no enunciado, que pode existir **(C) - Falso** Ver (A). O limite, a existir, nunca poderia ter o valor 4, uma vez que o enunciado afirma expressamente que existem duas sucessões imagem convergentes para 2 **(C) - Falso** Ver (A). O limite pode ser 2 mas não temos informação suficiente para o garantir

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Aplicação incorreta da definição de Heine, concluindo que o limite da função existe no ponto 1	Apenas conhecemos duas sucessões de objetos, o que não é suficiente para concluir que o limite da função exista no ponto 1. Mas a existir, terá de ter o valor 2

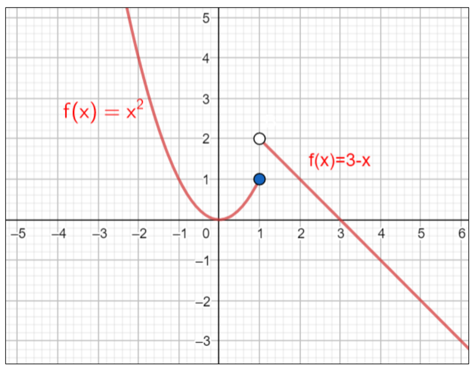
Anexo 2.3: Identificação da sucessão objeto dado o limite da sucessão imagem

Exercício 2.3: Sucessão objeto dado o limite da sucessão imagem (enunciado)

Seja $\boldsymbol{f}$ a função representada graficamente e definida por:

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.14

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ 3-x, & x>1 \end{cases}$$



Sabe-se que $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n})\right)\to \mathbf{2}$.

Qual dos seguintes pode ser o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$? Justifica a tua escolha.

(A) $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$; **(B)** $\boldsymbol{1-\frac{1}{n}}$; **(C)** $\boldsymbol{1+\frac{2}{n}}$; **(D)** $\boldsymbol{2+\frac{1}{n}}$

Exercício 2.3: Sucessão objeto dado o limite da sucessão imagem (resolução)
É possível resolver este exercício por via gráfica ou analítica. Irei aqui referir a forma gráfica e um exemplo de procedimento analítico. **(A) - Falso** Esta sucessão está sempre localizada no ramo em forma de parábola. Tratando-se de um infinitésimo, a sucessão imagem tende também para zero (sobre a parábola) **(B) - Falso** Sucessão tende para 1 por valores inferiores, estando assim também a respetiva sucessão imagem sobre a parábola. Esta última sucessão tende pois para 1 e não para 2 **(C) - Verdadeiro** Sucessão tende para 1 por valores superiores, pelo que a respetiva sucessão imagem cai sobre a reta '$3 - x$' . Quer por observação do gráfico, quer aplicando a álgebra de limites de sucessões [a sucessão imagem tem termo geral $\boldsymbol{f(u_n) = 2 - \frac{2}{n}}$], conclui-se que a sucessão imagem tende para 2, tal como referido no enunciado **(D) - Falso** Sucessão tende para 2 por valores superiores, pelo que a respetiva sucessão imagem cai sobre a reta '$3 - x$' . Quer por observação do gráfico, quer aplicando a álgebra de limites de sucessões [a sucessão imagem tem termo geral $\boldsymbol{f(u_n) = 1 - \frac{1}{n}}$], conclui-se que a sucessão imagem tende para 1 e não para 2 como referido no enunciado ***<u>NOTA</u>*** – É possível que algum aluno refira que existem sucessões objeto na região da parábola cujas sucessões imagem também tendem para 2. Será por exemplo o caso da sucessão de termo geral $\boldsymbol{u_n = -\sqrt{2} + \frac{1}{n}}$ (ou, mais simplesmente, a sucessão constante $\boldsymbol{u_n = -\sqrt{2}}$). Tratam-se no entanto de sucessões objeto que nunca poderão constituir solução do exercício, uma vez que as opções de resposta disponíveis correspondem a sucessões objeto com todos os termos positivos (quer dizer, localizados no semieixo positivo das abcissas)

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não perceber o problema, tal como está formulado	Ler o enunciado com o aluno, identificando o significado de cada informação fornecida e objetivo pretendido
Procurar seguir ou marcar a sucessão imagem ($\boldsymbol{f(x_n)}$) no eixo das abcissas	Perguntar em que eixo se marcam (ou se leem) os valores de uma função
Não conseguir construir / visualizar, com auxílio do gráfico, as imagens das sucessões ($\boldsymbol{u_n}$) sugeridas	Pedir ao aluno para indicar alguns termos de uma das sucessões objeto (por exemplo a $\frac{1}{n}$ por ser a mais simples) e marcar as respetivas imagens no gráfico

Anexo 2.4: Função sem limite porque falha uma sucessão

Exercício 2.4: Função sem limite porque falha uma sucessão (enunciado)
Seja $\boldsymbol{g}$ a função definida por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{2} - \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{2} \\ \mathbf{3}, & \boldsymbol{x} = \mathbf{2} \end{cases}$ Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.16   Comenta o texto seguinte: Dada qualquer sucessão $(\boldsymbol{x_n})$ de termos pertencentes ao domínio da função $\boldsymbol{g}$ e que tenda para 2, a sucessão de imagens $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_n}))$ tende para zero. Portanto pode concluir-se que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$.

Exercício 2.4: **Função sem limite porque falha uma sucessão** (resolução)
O erro no enunciado reside no facto da sucessão constante $\boldsymbol{x_n} = \mathbf{2}$ cumprir os pressupostos referidos no texto mas a respetiva sucessão imagem tender para 3 e não para 0 (zero). Ora na definição de limite segundo Heine basta um contraexemplo para que uma função não tenha limite (e é evidente que existem sucessões de objetos tendentes para 2 cujas sucessões imagem tendem para zero). Conclui-se assim que a função $\boldsymbol{g}$ não tem limite no ponto 2 do seu domínio.   Uma conclusão interessante a retirar deste exercício, é que o limite de qualquer função num ponto do seu domínio, se existir, terá de ser igual ao valor da função nesse ponto. É assim um critério rápido e prático para confirmar se uma função pode ou não ter determinado valor real como limite num ponto do seu domínio.

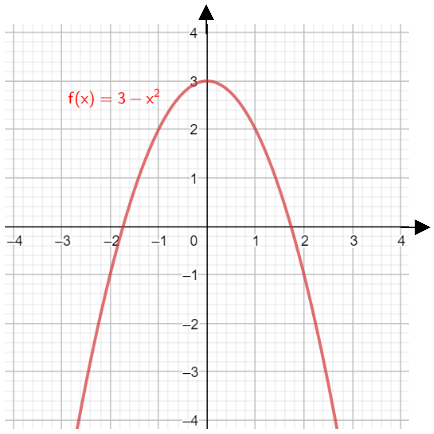
Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não conseguir representar graficamente a função	Embora não seja fundamental para a resolução, a representação gráfica pode ajudar a identificar o erro contido no texto
Não vislumbrar que a sucessão constante $\boldsymbol{x_n} = \mathbf{2}$ tem imagem que não tende para zero	Perguntar qual a sucessão mais simples que conhecem que tende para 2. E se a função $\boldsymbol{g}$ não estivesse definida no ponto 2?

Anexo 2.5: Consolidação da definição de limite segundo Heine

Exercício 2.5: Consolidação da definição de limite segundo Heine (enunciado)

Seja $\boldsymbol{f}$ a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = 3 - x^2}$, cujo gráfico se representa abaixo.

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.16



Determina, recorrendo à definição de limite (segundo Heine):

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to -2} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to a} f(x)$, em que $a \in \mathbb{R}$

Exercício 2.5: Consolidação da definição de limite segundo Heine (resolução)

Na resolução da alínea c) basta supor uma qualquer sucessão real, $(\boldsymbol{x_n})$, que tome valores no domínio de $\boldsymbol{f}$ ($D_f = \mathbb{R}$) e tenda para $\boldsymbol{a}$, concluindo através da aplicação da operatória de limites de sucessões que a respetiva sucessão imagem [de termo geral $\boldsymbol{f(x_n) = 3 - x_n{}^2}$] tenderá para '$\boldsymbol{3 - a^2}$'.

As alíneas a) e b) poderão ser resolvidas através de simples substituição do parâmetro $\boldsymbol{a}$ pelo valor respetivo (zero e '-2', respetivamente).

É evidentemente expectável que os alunos resolvam primeiro as alíneas a) e b), mas a resolução da alínea c) deverá servir para concluir que as resoluções anteriores são apenas casos particulares.

Também convém referir que esta expressão geral para o limite da função num ponto genérico do domínio só foi possível porque a função tem domínio real e é 'bem comportada' (isto é, tem limite real em todos os pontos do seu domínio)

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não conseguir aplicar formalmente a definição de limite segundo Heine	Pedir ao aluno que enuncie a definição e calcule o limite seguindo o texto, passo a passo
Não aplicar o mesmo raciocínio na alínea c) pelo facto de aparecer um ponto genérico	Pedir ao aluno que siga exatamente a mesma técnica usada nas alíneas anteriores

Anexo 2.6: Ficha de Trabalho nº 2

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Matemática A - 11º Ano - Turma 11º E - Ano Letivo 2018/2019

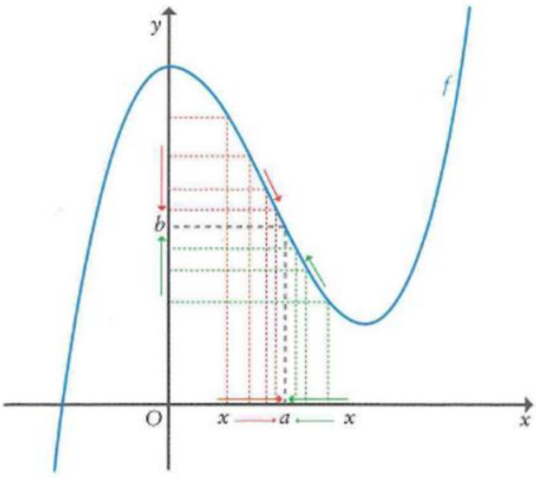
Limites de Funções Reais de Variável Real

Grupo de Trabalho: ________________________ / ________________________ / ________________

Definição de limite de uma função real de variável real (segundo Heine):

Dada uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$ que seja ponto aderente ao domínio, D_f, de $\boldsymbol{f}$, diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é **limite de $f(x)$ quando x tende para a** ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$) quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f, convergente para a, a sucessão $\big(f(x_n)\big)$ tende para b.

(ver página 13, volume 3 do teu manual)



$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

1.

Seja $\boldsymbol{f}$ uma função de domínio $\mathbb{R}$ e seja $(\boldsymbol{x_n})$ a sucessão definida por $\boldsymbol{x_n} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+1}}$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 0} \boldsymbol{f(x) = 2}$.

Indica qual a proposição verdadeira, justificando a tua escolha.

(A) – A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ não é convergente.

(B) – A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ tende para 1.

(C) – A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ tende para 2.

(D) – A sucessão $(\boldsymbol{f(x_n)})$ é um infinitésimo.

2.

Sejam $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$ as sucessões de termos gerais, respetivamente, $\frac{n+1}{n}$ e $\frac{n-1}{n}$, e seja $\boldsymbol{f}$ uma função real de variável real com domínio $\mathbb{R}$.

a)

Sabe-se que $\left(f(u_n)\right) \to \mathbf{0}$ e que $\left(f(v_n)\right) \to \mathbf{2}$.

O que se pode concluir acerca da existência de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Qual das afirmações abaixo está correta? Justifica a tua decisão.

(A) – A função $f(x)$ não tem limite real quando $x \to 1$.

(B) – $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

(C) – $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

(D) – $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

b)

Considera agora que $\left(f(u_n)\right) \to \mathbf{2}$ e $\left(f(v_n)\right) \to \mathbf{2}$.

O que se pode concluir acerca da existência de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Indica, justificando, qual a resposta correta.

(A) – Se a função $f(x)$ tiver limite quando $x \to \mathbf{1}$, esse limite terá de ser 2.

(B) – $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe.

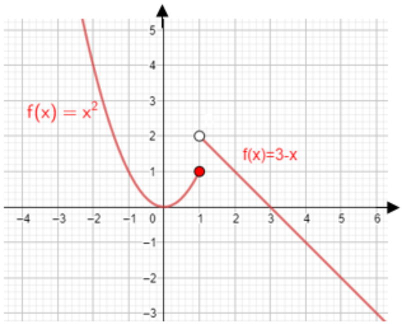
(C) – $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$

(D) – $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

3.

Seja $\boldsymbol{f}$ a função representada graficamente e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$$



Sabe-se que $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n})\right) \rightarrow \boldsymbol{2}$.

Qual dos seguintes pode ser o termo geral da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$? Justifica a tua escolha.

(A) $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$; **(B)** $\boldsymbol{1 - \frac{1}{n}}$; **(C)** $\boldsymbol{1 + \frac{2}{n}}$; **(D)** $\boldsymbol{2 + \frac{1}{n}}$

4.

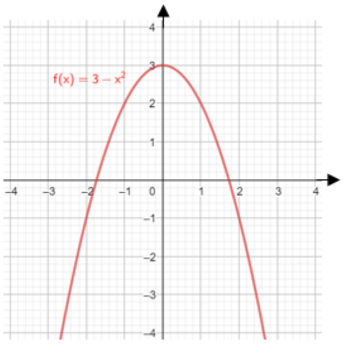
Seja $\boldsymbol{g}$ a função definida por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{2 - x}, & \boldsymbol{x \neq 2} \\ \boldsymbol{3}, & \boldsymbol{x = 2} \end{cases}$

Comenta o texto seguinte:

Dada qualquer sucessão $(\boldsymbol{x_n})$ de termos pertencentes ao domínio da função $\boldsymbol{g}$ e que tenda para 2, a sucessão de imagens $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_n}))$ tende para zero. Portanto pode concluir-se que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$.

5.

Seja $\boldsymbol{f}$ a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = 3 - x^2}$, cujo gráfico se representa abaixo.



Determina, recorrendo à definição de limite (segundo Heine):

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, em que $a \in \mathbb{R}$

Anexo 3: Plano de Aula 3

Plano de Aula - 14 de março de 2019

Matemática A

Domínio: Funções Reais de Variável Real
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Sumário(2 tempos = 90 minutos)
▪ Extensão do conceito de limite a limites infinitos ($+\infty$ e $-\infty$) ▪ Limites laterais ▪ Limites no infinito ▪ Exercícios de consolidação

Objetivos
▪ Estender de forma natural o conceito de limite num ponto real a mais e menos infinito ▪ Limites laterais como restrição do conceito de limite ▪ Existência de limite quando a variável independente tende para mais ou menos infinito ▪ Aplicar e consolidar os novos conceitos e noções apreendidos na aula através de alguns exercícios selecionados

Conhecimentos Prévios
▪ Noção de limite de uma sucessão; ▪ Propriedades operatórias de limites de sucessões; ▪ Definição de limite num ponto de uma função real de variável real, segundo Heine; ▪ Restrição de uma função a um subconjunto do seu domínio; ▪ Operações algébricas sobre funções

Capacidades Transversais
▪ Raciocínio Matemático ▪ Comunicação Matemática, oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, explicando raciocínios e apresentando conclusões de forma clara e rigorosa ▪ Resolução de problemas envolvendo a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de regras e procedimentos anteriormente apreendidos, revendo sempre que necessário a estratégia preconizada e interpretando os resultados obtidos ▪ Trabalhar em grupo, aproveitando sinergias geradas pela colaboração e cooperação

Metodologia de Trabalho
▪ Turma organizada em grupos de trabalho de dois ou três alunos;

Metodologia de Trabalho
▪ Apresentação à turma de novas propriedades e extensões naturais do conceito de limite de uma função real de variável real; ▪ Resolução autónoma de exercícios propostos, ilustrativos das novas propriedades e conceitos; ▪ Discussão de resoluções selecionadas com toda a turma, sistematização de resultados e conclusões

Avaliação
▪ A produção dos alunos será analisada e avaliada através de gravação áudio e fotos da atividade de resolução de alguns grupos de trabalho; ▪ Serão igualmente registadas notas de campo baseadas na atividade e comportamento geral da turma em aspetos como o Pontualidade; o Interesse e participação nas atividades propostas; o Cooperação e espírito de entreajuda no trabalho em grupo; o Aplicação e integração de conhecimentos anteriores nos novos conteúdos; o Utilização correta de simbologia e linguagem matemática o Comportamento em sala de aula ▪ No final da aula número 6 haverá um miniteste de avaliação sumativa, com duração aproximada de 20 minutos, endereçando o tópico dos limites de funções reais de variável real. O miniteste será resolvido pelos mesmos grupos de trabalho das aulas anteriores

Recursos
▪ Por parte do **Professor**: o Canetas de cores distintas (mínimo 2 cores); o Manual da disciplina adotado pela escola (volume 3); o Tarefas e exercícios a propor aos alunos (Ficha de Trabalho nº 3). ▪ Por parte do **Aluno**: o Caderno diário de apontamentos; o Calculadora gráfica

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Início da aula com breve síntese da conclusão da aula anterior	5
▪ Extensão natural do conceito de limite a limites infinitos ▪ Limites no infinito ▪ Limites laterais	10-15

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Distribuição da 'Ficha de Trabalho nº 3', solicitando à turma a resolução dos exercícios 1 e 2	15
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 1, com discussão para esclarecimento de dúvidas	10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 2, com discussão para esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Prosseguir com a resolução autónoma dos exercícios 3 e 4 da ficha de trabalho	15
▪ Apresentação de uma resolução previamente selecionada do exercício 3, com discussão para esclarecimento de dúvidas	10
▪ Apresentação de uma resolução selecionada do exercício 4, com discussão para esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Resolução autónoma do exercício 5	5-10
▪ Encerramento da aula com síntese dos novos conceitos e propriedades apreendidos; ▪ Caso alguns alunos não consigam concluir o exercício 5, serão convidados a terminá-lo em casa. Na próxima aula usar-se-ão os resultados para definir o conceito de ponto aderente	5

Desenvolvimento da Aula

- ***Início da aula***

A aula iniciar-se-á com a escrita no quadro da definição de limite segundo Heine. Desta forma se procurará que os alunos recordem o ponto em que ficaram na aula anterior.

- ***Extensão natural do conceito de limite a limites infinitos***

Pede-se à turma para reformular a definição de limite segundo Heine apresentada no quadro, de forma a que passe a contemplar limites (da função) no infinito. Espera-se que os alunos o façam de forma intuitiva, mobilizando os conhecimentos de limites de sucessões.

- ***Limites no infinito***

Usando exatamente a mesma técnica, solicita-se à turma como alteraria a definição de Heine apresentada para incluir cenários em que o domínio da função não fosse limitado (não minorado, não majorado ou ambos) e, portanto, a variável independente pudesse tender para (mais ou menos) infinito.

- ***Limites laterais***

Os limites laterais serão então introduzidos como limites da função em que se restringe a escolha de sucessões objeto a apenas um dos lados do ponto onde o limite é calculado. De seguida indicam-se as relações entre limites laterais e limite da função.

Desenvolvimento da Aula

- ***<u>Distribuição da Ficha de Trabalho nº 3. Início da resolução dos exercícios 1 e 2, em grupos de trabalho autónomos de dois ou três alunos</u>***

A ficha é distribuída aos alunos, solicitando-lhes que resolvam os exercícios 1 e 2. O Professor percorre a sala, observando e evolução da resolução pelos diferentes grupos, procurando desbloquear situações em que observe que os alunos não progridem. Responde também a solicitações ou dúvidas colocadas pelos alunos, evitando reduzir o nível de desafio de cada tarefa.

- ***<u>Apresentação de resoluções, discussão e conclusão dos exercícios 1 e 2</u>***

Ambos os exercícios servirão para consolidar a definição de limite segundo Heine, permitindo explorar limites laterais e relacionar estes com aquele. Portanto, para além da exploração das resoluções apresentadas pelos alunos, procurar-se-á explorar outras abordagens, nomeadamente através dos diferentes limites laterais (finitos ou infinitos).

Cada resolução selecionada será apresentada à turma por um aluno do grupo que a executou, sendo depois a turma questionada sobre dúvidas ou possíveis incorreções detetadas.

- ***<u>Resolução autónoma dos exercícios 3 e 4 pelos grupos de trabalho</u>***

Os alunos são convidados a prosseguir a resolução dos exercícios da Ficha de Trabalho nº 3. Seguem-se agora os exercícios 3 e 4.

A metodologia e papel do Professor durante a resolução autónoma pelos alunos é a habitual: observação da atividade dos grupos, procurando que todos progridam e ninguém esteja parado. No caso do exercício 3 é muito provável que venha a ser necessário recordar à turma o significado da soma de duas funções. O Professor procurará que algum aluno responda a esta questão, caso vários grupos que não consigam resolver a segunda parte do exercício.

- ***<u>Apresentação de resoluções, discussão e conclusão (exercícios 3 e 4)</u>***

Segue-se a apresentação à turma de resoluções selecionadas, seguidas de discussão para esclarecimento de dúvidas ou correção de erros ou imprecisões.

O exercício 3 é particularmente rico, uma vez que permitirá concluir que a soma de funções pode apresentar comportamento bastante diverso, no que aos limites diz respeito, de cada uma das funções parcelas.

O exercício 4 é semelhante a outro já realizado na Ficha nº 2, agora aplicado a limites no infinito. Permitirá também, tal como sucedeu no exercício 2, ilustrar assíntotas horizontais.

- ***<u>Exercício 5</u>***

É bem provável que não haja tempo para iniciar a resolução deste exercício. No entanto resolveu-se incluí-lo na Ficha por duas razões: permitir que grupos mais eficientes continuassem a trabalhar e convidar a turma a resolvê-lo em casa.

Este exercício não mobiliza novos conhecimentos por parte dos alunos. Pelo contrário, começa por ser uma revisão do que já aprenderam sobre sucessões. O verdadeiro desafio está nas duas questões finais, que servirão de mote à definição de ponto aderente com se iniciará a próxima aula.

Desenvolvimento da Aula

- ***Encerramento da Aula***

A aula encerrará com uma breve síntese dos assuntos abordados. Os grupos que não tiverem iniciado ou terminado o exercício 5, serão convidados a fazê-lo em casa como trabalho individual.

Anexo 3.1: Extensão do conceito de limite a limites infinitos

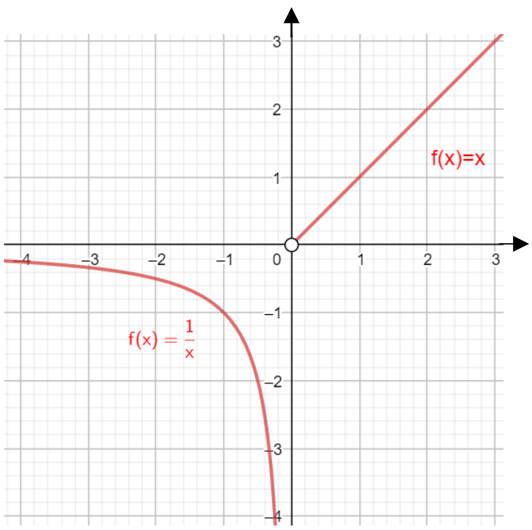
Exercício 3.1: Extensão do conceito de limite a limites infinitos (enunciado)

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.18

Seja f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

e com a representação gráfica ao lado.



Será que existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? Justifica a tua resposta usando a definição de limite segundo Heine.

Exercício 3.1: Extensão do conceito de limite a limites infinitos (resolução)

O limite não existe porque é possível indicar infinitésimos cujas sucessões imagem tendem para limites distintos (por exemplo $u_n = \frac{1}{n}$ e $v_n = -\frac{1}{n}$).

Trata-se de um bom exemplo em que os limites laterais são distintos, pelo que não poderia existir o limite da função no ponto zero. Também se pode assinalar que nada se alteraria se a função estivesse definida no ponto de abcissa zero.

Dificuldades do aluno	Estratégias do professor
Não conseguir identificar infinitésimos adequados (ou indicar sucessões que não sejam infinitésimos)	Recordar a definição de Heine e assinalar que a função apresenta dois ramos separados precisamente no ponto de abcissa zero (que não pertence ao domínio)
Se o aluno escolher um infinitésimo oscilante em torno de zero isso dificulta a análise	Não haverá infinitésimos menos problemáticos? Que tal separarmos os termos do infinitésimo escolhido em valores positivos e negativos? Por que razão isso facilitará a nossa análise do comportamento da sucessão imagem?
Tentar aplicar a definição de Heine através de uma generalização em vez de uma exceção (ou contraexemplo)	Como tratar um infinitésimo qualquer, caso ele apresente termos positivos e negativos? A observação do gráfico não parece sugerir que não deverá existir limite no ponto de abcissa zero? Não será então melhor estratégia procurar um contraexemplo?

Anexo 3.2: Limites infinitos e limites laterais

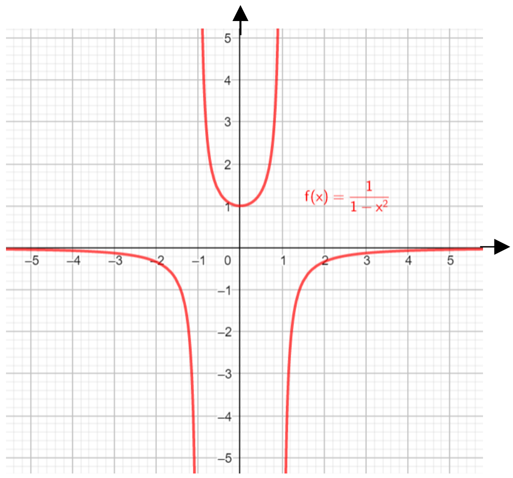
Exercício 3.2: **Limites infinitos e limites laterais** (enunciado)

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.19

Seja $\boldsymbol{f}$ a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, definida por

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1 - x^2}}$$

e representada graficamente.



Sejam $\boldsymbol{u_n = 1 - \frac{1}{n}}$, $\boldsymbol{v_n = \frac{n+1}{n}}$ e $\boldsymbol{w_n = \frac{1-n}{n}}$ os termos gerais de três sucessões.

Determina os limites das sucessões $(\boldsymbol{f(u_n)})$, $(\boldsymbol{f(v_n)})$ e $(\boldsymbol{f(w_n)})$.

Exercício 3.2: Limites infinitos e limites laterais (resolução)

As sucessões $\boldsymbol{v_n}$ e $\boldsymbol{w_n}$ podem ser reescritas como $\boldsymbol{1 + \frac{1}{n}}$ e $\boldsymbol{-1 + \frac{1}{n}}$, respetivamente, o que facilitará a análise a muitos alunos.

Exercício 3.2: Limites infinitos e limites laterais (resolução)
O estudo resume-se assim em observar o comportamento da função em torno dos pontos de abcissas 1 e -1, onde existem assíntotas verticais (e portanto o limite da função será infinito). A maior parte dos alunos tenderá a resolver o problema por substituição direta do termo geral de cada sucessão na expressão analítica da função. Salientar que o recurso à notação $\mathbf{1}^-$ e $\mathbf{1}^+$ (introduzida a propósito dos limites laterais) pode agilizar em muito o cálculo dos limites pretendidos, em conjunção com a aplicação direta da álgebra de limites de sucessões. Chamar a atenção para a simetria de comportamento dos limites nos pontos 1 e -1 e igualmente para o comportamento da função quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$ (assíntota horizontal, ou seja, o limite da função será agora finito).

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não conseguir interpretar o gráfico e identificá-lo com a definição analítica da função	Identificar as singularidades da expressão analítica e confirmar que as mesmas correspondem a descontinuidades no gráfico. Verificar por exemplo a imagem do objeto zero, $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$.
Os alunos que optarem por substituição direta da sucessão na expressão analítica da função poderão ter dificuldades de operatória	Relembrar casos notáveis da multiplicação e operatória de limites de sucessões
Não conseguir perceber o limite de cada sucessão objeto e/ou a forma como esse limite é atingido	Tentar dar uma forma diferentes às expressões das sucessões $\boldsymbol{v_n}$ e $\boldsymbol{w_n}$.

Anexo 3.3: Exercício de consolidação sobre limites laterais

Exercício 3.3: Exercício de consolidação sobre limites laterais (enunciado)
Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definidas por: Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.21 $$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{2x+3}, & \boldsymbol{x<0} \\ \mathbf{3x+2}, & \boldsymbol{x>0} \end{cases} \qquad \boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x-1}, & \boldsymbol{x<0} \\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x>0} \end{cases}$$ Mostra que não existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ nem existe $\lim\limits_{x\to0} g(x)$, <u>mas existe</u> $\lim\limits_{\boldsymbol{x\to0}}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$.

Exercício 3.3: Exercício de consolidação sobre limites laterais (resolução)
Os limites laterais podem determinar-se imediatamente, sem necessidade de invocar (explicitamente) as sucessões tendentes para zero. No entanto é expectável que a maioria

Exercício 3.3: Exercício de consolidação sobre limites laterais (resolução)
dos alunos ainda recorra explicitamente a infinitésimos (de valores positivos e negativos). É muito importante que os alunos consigam representar analiticamente a função soma. Aí será evidente que os dois ramos passam a apresentar o mesmo valor (2) no ponto de abcissa zero (ainda que este continue a não pertencer ao domínio da função soma). Os alunos deverão entender que, em cenários como o apresentado neste problema, é mais simples mostrar a existência de limite pela igualdade dos limites laterais.

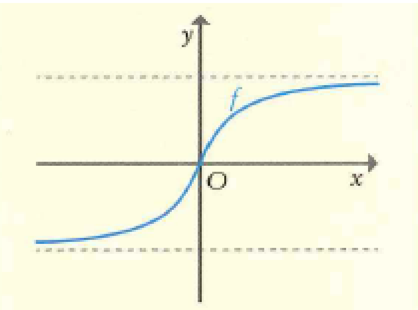
Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Aluno não tenta provar a inexistência de limite através do cálculo dos limites laterais	Mostrar que qualquer outra via, por exemplo recorrendo a uma sucessão oscilante, acaba por se traduzir na análise de limites laterais
Aluno não consegue determinar a expressão analítica da função soma	Recordar quais as regras para soma de funções e convidar o aluno a aplicá-las ao exemplo do exercício
Aluno tenta representar graficamente as funções (e provavelmente não consegue ou erra a representação)	É uma estratégia possível, mas torna a resolução muito mais demorada. É conveniente que os alunos se habituem a trabalhar analiticamente, especialmente em problemas simples como este

Anexo 3.4: Exercício de consolidação sobre limites no infinito

Exercício 3.4: Exercício de consolidação sobre limites no infinito (enunciado)

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente.

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.23



Sabe-se que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

As expressões $4n-1$, $\frac{2n-1}{n}$ e $\frac{1-2n^2}{n}$ definem três sucessões, (u_n), (v_n) e (w_n), <u>não necessariamente por esta ordem</u>.

Identifica as sucessões $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$, sabendo que $\left(\boldsymbol{f(u_n)}\right) \to \mathbf{2}$ e $\left(\boldsymbol{f(v_n)}\right) \to \mathbf{-2}$.

Exercício 3.4: Exercício de consolidação sobre limites no infinito (resolução)
Este exercício aplica a definição de Heine. O facto dos limites existirem, obriga a que a sucessão de objetos $\boldsymbol{u_n}$ tenha obrigatoriamente de tender para $+\infty$. Da mesma forma, a sucessão $\boldsymbol{v_n}$ terá de tender para $-\infty$ .Esta conclusão deverá permitir ao aluno identificar imediatamente o termo geral de cada uma das sucessões. Perguntar aos alunos porque razão a sucessão de termo geral $\frac{2n-1}{n}$ poderia ser imediatamente excluída como uma possível solução deste problema. Chamar a atenção para o facto das retas horizontais a tracejado serem assíntotas da função.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não identificar que uma das sucessões apresentadas tem de ser excluída	Recordar a definição de Heine. Neste cenário as sucessões de objetos não podem ser limitadas
Não recordar ou não saber aplicar a definição de Heine, nomeadamente partindo da sucessão imagem para a sucessão objeto	Existindo o limite da função e conhecido o limite da sucessão imagem, ficamos a saber para onde tem de tender a correspondente sucessão objeto, de forma a cumprirmos a definição de Heine
Não perceber que a sucessão de termo geral $\frac{2n-1}{n}$ nunca poderia constituir uma solução	Ambos os limites apresentados no enunciado são no infinito, pelo que só faz sentido considerar sucessões objeto que tendam para infinito

Anexo 3.5: Introdução ao conceito de ponto aderente

Exercício 3.5: Introdução ao conceito de ponto aderente (enunciado)
Seja o conjunto $\boldsymbol{A} =]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$. Define, pelo termo geral, sucessões de termos pertencentes a $\boldsymbol{A}$ com limite igual a: **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** 1 **c)** 0 Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.8 Achas que consegues encontrar alguma sucessão de termos pertencentes ao conjunto $\boldsymbol{A}$ que tenha limite igual a **1,01**? E limite igual a **-0,001**?

Exercício 3.5: Introdução ao conceito de ponto aderente (resolução)
Não prevejo que nenhum aluno consiga indicar pelo menos uma sucessão para cada uma das alíneas. Exemplos simples (excluindo as sucessões constantes): a) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ b) $1-\frac{1}{n+1}$ c) $\frac{1}{n}$ Já no que respeita às duas últimas questões é possível que surjam algumas dificuldades, uma vez que, não sendo pontos aderentes ao conjunto, não existe qualquer sucessão nas condições indicadas. Por exemplo, no caso do valor **'1,01'**, qualquer sucessão de elementos de $\boldsymbol{A}$ *nunca poderia aproximar-se dele menos de '0,01'* (ou seja, o valor de **L** – ou de $\boldsymbol{\delta}$ – usado na definição de limite de uma sucessão não poderia ser qualquer número positivo), pelo que **a referida sucessão nunca poderá ter '1,01' como limite**. Os alunos perceberão que a sucessão constante é, em qualquer caso, a solução mais simples. Isso será importante na identificação dos pontos aderentes a um conjunto dado.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não conseguirem identificar sucessões nas condições indicadas	Ajudar os alunos, indicando que pensem na combinação de sucessões constantes com infinitésimos. E a sucessão constante, não verificará as condições?
Não conseguirem identificar sucessões para pontos não aderentes e ficarem bloqueados	Será que pode haver uma sucessão que tenda para um dos pontos não aderentes indicado? Recordar que a definição de limite implica que nos possamos aproximar tanto quanto queiramos. E podemos?
Quais então os pontos (da reta real) que podem constituir limite de uma sucessão de elementos do conjunto $\boldsymbol{A}$?	A resposta deverá ser todos os pontos pertencentes ao conjunto $\boldsymbol{A}$ e também o ponto zero (pelo facto de qualquer vizinhança de zero conter um elemento de $\boldsymbol{A}$, pelo menos)

Anexo 3.6: Ficha de Trabalho nº 3

ESPAN - 11º ano **Ficha de Trabalho nº 3** março 2019

Escola Secundária Padre Alberto Neto

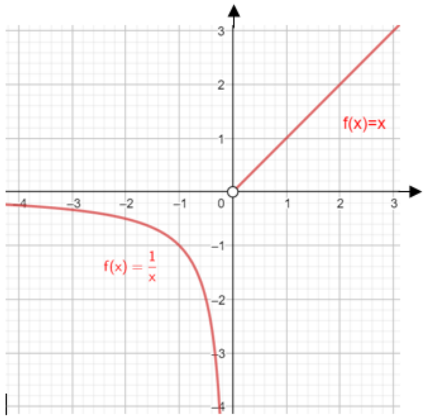
Matemática A - 11º Ano - Turma 11º E - Ano Letivo 2018/2019

Limites de Funções Reais de Variável Real

Grupo de Trabalho: ______________________ / ______________________ / _______________

1.

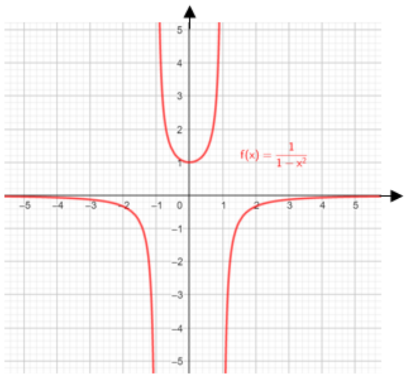
Seja $\boldsymbol{f}$ a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ e com a representação gráfica abaixo.



Será que existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Justifica a tua resposta usando a definição de limite segundo Heine.

2.

Seja $\boldsymbol{f}$ a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, definida por $\boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{1-x^2}$ e representada graficamente.



Sejam $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{n+1}{n}$ e $w_n = \frac{1-n}{n}$ os termos gerais de três sucessões.

Produzido por Fernando Mendes (Mestrado Ensino Matemática – IE-FCUL) Pág. 1 de 3

Determina os limites das sucessões $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n}))$, $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v_n}))$ e $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w_n}))$.

3.

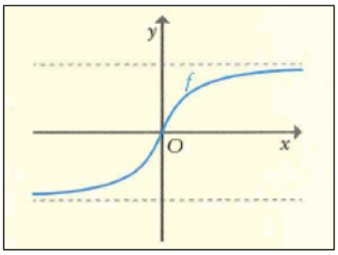
Sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ as funções, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definidas por:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}, & \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}, & \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \end{cases} \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} - \mathbf{1}, & \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} & , \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \end{cases}$$

Verifica que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nem existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, <u>mas existe</u> $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$.

4.

Seja $\boldsymbol{f}$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente.



Sabe-se que $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to -\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{2}$ e $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to +\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}$.

As expressões $\mathbf{4}\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$, $\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ e $\frac{\mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{n}}$ definem três sucessões, $(\boldsymbol{u_n})$, $(\boldsymbol{v_n})$ e $(\boldsymbol{w_n})$, <u>não necessariamente por esta ordem</u>.

Identifica quais são as sucessões $(\boldsymbol{u_n})$ e $(\boldsymbol{v_n})$, sabendo que $\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n})\big) \to \mathbf{2}$ e $\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v_n})\big) \to -\mathbf{2}$.

5.
Seja o conjunto $\boldsymbol{A} =]\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Define, pelo termo geral, sucessões de termos pertencentes a $\boldsymbol{A}$ com limite igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) 0

Achas que consegues encontrar alguma sucessão de termos pertencentes ao conjunto $\boldsymbol{A}$ que tenha limite igual a **1,01**? E limite igual a -**0,001**?

Anexo 4: Plano de Aula 4

Plano de Aula - 18 de março de 2019

Matemática A

Domínio: Funções Reais de Variável Real
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Sumário(2 tempos = 90 minutos)
▪ Ponto aderente a um conjunto e aderência de um conjunto ▪ Cálculo de limites com apoio da representação gráfica de funções ▪ Propriedades operatórias dos limites (Álgebra dos Limites) ▪ Exercícios de consolidação

Objetivos
▪ Importância da noção de ponto aderente na definição de limite segundo Heine ▪ Confirmar conclusões obtidas por via analítica com a observação dinâmica da representação gráfica da função ▪ Propriedades operatórias dos limites de funções como corolário das propriedades correspondentes já estudadas para os limites de sucessões ▪ Identificação de situações de indeterminação, tal como ocorrido nos limites de operações sobre sucessões ▪ Primeiros exercícios de cálculo de limites por aplicação direta da álgebra dos limites de funções

Conhecimentos Prévios
▪ Noção de limite de uma sucessão; ▪ Propriedades operatórias de limites de sucessões; ▪ Definição de limite num ponto de uma função real de variável real, segundo Heine; ▪ Propriedades de funções especiais (função par / ímpar)

Capacidades Transversais
▪ Raciocínio Matemático ▪ Comunicação Matemática, oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, explicando raciocínios e apresentando conclusões de forma clara e rigorosa ▪ Resolução de problemas envolvendo a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de regras e procedimentos anteriormente apreendidos, revendo sempre que necessário a estratégia preconizada e interpretando os resultados obtidos ▪ Destreza na manipulação e simplificação de expressões algébricas ▪ Trabalhar em grupo, aproveitando sinergias geradas pela colaboração e cooperação

Metodologia de Trabalho
▪ Turma organizada em grupos de trabalho de dois ou três alunos; ▪ Últimos exercícios de consolidação da definição de limite segundo Heine, com recurso ao apoio da representação gráfica da função em análise; ▪ Resolução autónoma de exercícios de cálculo de limites por aplicação de propriedades operatórias derivadas do estudo das sucessões; ▪ Discussão de resoluções selecionadas com toda a turma, sistematização de resultados e conclusões

Avaliação
▪ A produção dos alunos será analisada e avaliada através de gravação áudio e fotos da atividade de resolução de alguns grupos de trabalho; ▪ Serão igualmente registadas notas de campo baseadas na atividade e comportamento geral da turma em aspetos como o Pontualidade; o Interesse e participação nas atividades propostas; o Cooperação e espírito de entreajuda no trabalho em grupo; o Aplicação e integração de conhecimentos anteriores nos novos conteúdos; o Utilização correta de simbologia e linguagem matemática o Comportamento em sala de aula ▪ No final da aula número 6 haverá um miniteste de avaliação sumativa, com duração aproximada de 20 minutos, endereçando o tópico dos limites de funções reais de variável real. O miniteste será resolvido pelos mesmos grupos de trabalho das aulas anteriores

Recursos
▪ Por parte do **Professor**: o Canetas de cores distintas (mínimo 2 cores); o Manual da disciplina adotado pela escola (volume 3); o Tarefas e exercícios a propor aos alunos (Ficha de Trabalho nº 4); ▪ Por parte do **Aluno**: o Caderno diário de apontamentos; o Calculadora gráfica

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Início da aula com breve síntese da conclusão da aula anterior	5
▪ Distribuição da ‘Ficha de Trabalho nº 4’, solicitando à turma a resolução dos exercícios 1, 2 e 3	10-15

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 1, com discussão para esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 2, com discussão para esclarecimento de dúvidas	10-15
▪ Apresentação de uma resolução previamente selecionada do exercício 3, com discussão para esclarecimento de dúvidas	15
▪ Apresentação das propriedades operatórias dos limites de funções como consequência direta das propriedades homónimas já estudadas para os limites de sucessões	5
▪ Resolução autónoma das alíneas do exercício 4	5-10
▪ Apresentação de resoluções selecionadas do exercício 4 no quadro, seguida de esclarecimento de dúvidas	10
▪ Resolução autónoma das alíneas do exercício 5	10
▪ Apresentação de resoluções selecionadas do exercício 5 no quadro, seguida de esclarecimento de dúvidas; ▪ Síntese e encerramento da aula	10

Desenvolvimento da Aula
▪ ***<u>Início da aula</u>*** A aula inicia-se com a distribuição à turma da Ficha de Trabalho nº4. Recordar-se-á então o último exercício da aula anterior onde se introduziu sumariamente o conceito de ponto aderente a um conjunto e aderência de um conjunto. Os alunos serão informados de que as referidas definições estão apresentadas no exercício 1 de ficha. ▪ ***<u>Início da resolução dos exercícios 1, 2 e 3, em grupos de trabalho autónomo de dois ou três alunos</u>*** Pede-se á turma que inicie a resolução dos exercícios 1, 2 e 3 da ficha de trabalho. O exercício 1 visa consolidar o conceito de ponto aderente a um conjunto já introduzido sumariamente na aula anterior. Os exercícios 2 e 3 não apresentam novos desafios. Têm como objetivo prosseguir (e encerrar) o cálculo de limites de funções reais de variável real, recorrendo a metodologia que apela, de forma mais ou menos explícita, para a definição de Heine, ilustrada dinamicamente através da representação gráfica da função. O Professor acompanha a resolução dos alunos, esclarecendo dúvidas e desbloqueando situações que impeçam os grupos de prosseguir a resolução. Observa também as diferentes estratégias adotadas e seleciona resoluções que possam ter interesse na posterior discussão com toda a turma. ▪ ***<u>Apresentação de resoluções, discussão e conclusão do exercício 1</u>***

Desenvolvimento da Aula

A resolução deste exercício não deverá levantar grandes questões por parte dos alunos, em virtude do tema ter já sido sucintamente abordado no final da aula anterior. É provável que os alunos não recordem a definição de ponto aderente, mas o facto de a mesma estar repetida na própria ficha deverá facilitar significativamente a resolução. Não se preveem assim dificuldades na conclusão deste exercício.

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão (exercício 2)***

Este exercício tem como principal dificuldade o recurso à imparidade da função para determinar o seu limite em menos infinito. A alínea **a)** apela diretamente à definição de Heine e espera-se que, nesta altura, não constitua um obstáculo para (pelo menos) alguns alunos da turma, o que deverá ser aproveitado pelo Professor durante a discussão no esclarecimento de dúvidas e dificuldades que venham a ser apresentadas.

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão (exercício 3)***

Este será o último exercício a ser resolvido em aula onde está presente de forma explícita a definição de Heine (no sentido em que se apela às sucessões para resolver o limite). Permitirá igualmente fazer uma síntese dos resultados já alcançados, nomeadamente limites laterais, limites no infinito e sucessões constantes. Poder-se-á igualmente apresentar uma variante da função que permita recordar a condição para a existência de limite num ponto do domínio da função.

É muito provável que a maioria (ou todos) os grupos resolvam a alínea **a)** do exercício recorrendo a limites laterias. Convém recordar-lhes que o poderiam fazer também invocando a definição de Heine, escolhendo adequadamente as sucessões de contraexemplo. Já para a alínea **b)** a definição de Heine é essencial, ainda que a observação do gráfico possa também ser invocada.

- ***Propriedades operatórias de limites e resolução autónoma dos exercícios 4 e 5***

A referência às propriedades operatórias de limites deverá ser breve, uma vez que as mesmas resultam diretamente de propriedades semelhantes já estudadas nos limites de sucessões e se pretende que os alunos as reconheçam e apliquem na resolução prática de limites de expressões algébricas.

O exercício 4 permitirá aplicar diretamente as regras operatórias da álgebra dos limites de funções. Eventuais dificuldades serão esclarecidas pelo meu acompanhamento da resolução junto dos grupos de trabalho. O exercício 5 é muito semelhante em termos de dificuldades, no entanto a presença da função genérica $g(x)$ e de um radical pode surpreender ou atemorizar alguns grupos, eventualidade a que estarei atento.

- ***Apresentação de resoluções dos exercícios 4 e 5 e respetiva discussão. Conclusão da aula***

Espero que a discussão se centre nalguma confusão causada pela presença de limites laterais, embora a presença da função $g(x)$ me pareça vir a concentrar a maioria das dúvidas e dificuldades. É frequente os alunos não lerem com atenção os enunciados antes de se lançarem no processo de resolução, o que pode dificultar o ataque ao exercício 5, no que respeita á forma de lidar com a presença da função $g(x)$. Não prevejo que a função com radical ofereça muita polémica, uma vez que a respetiva resolução resulta diretamente de um dos teoremas sobre operações com limites. É no entanto possível que alguns grupos não tenham tido tempo para concluir a resolução de todas as alíneas do exercício 5 (ou que tenham saltado algumas alíneas do exercício 4).

Desenvolvimento da Aula
A concluir a aula reforçar junto da turma o facto, observado nos exercícios, de as propriedades aplicadas na resolução de limites de funções resultarem imediatamente do que estudaram a aplicaram no estudo de limites de sucessões.

Anexo 4.1: Ponto aderente a um conjunto e aderência de um conjunto

Exercício 4.1: Ponto aderente e aderência de um conjunto (enunciado)
Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.9 **a)** Se $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, será que $\boldsymbol{a}$ é aderente ao conjunto A? Porquê? **b)** Indica justificando qual o conjunto de pontos aderentes (aderência de) de cada um dos seguintes conjuntos: **b1)** $A =]2,7[$ **b2)** $B = \{1, 2, 3\}$ **b3)** $C = \{-1,0,1\} \cup]2, 7] \cup [8,9[$

Exercício 4.1: Ponto aderente e aderência de um conjunto (resolução)
a) Sim, sempre. Porque basta escolher a sucessão constante cujo termo é o ponto $\boldsymbol{a}$. **b1)** Aderência de $A = [2,7]$ .Os pontos 2 e 7 não pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A}$ e podem por exemplo considerar-se as sucessões $\boldsymbol{u_n = 2 + \frac{1}{n}}$ e $\boldsymbol{v_n = 7 - \frac{1}{n}}$, respetivamente **b2)** A aderência coincide com o próprio conjunto $\boldsymbol{B}$ **b3)** Aderência de $C = \{-1,0,1\} \cup [2,7] \cup [8,9]$ .Os pontos 2 e 9 não pertencem ao conjunto $\boldsymbol{C}$. Podem considerar-se por exemplo as sucessões $\boldsymbol{u_n = 2\frac{n+1}{n}}$ e $\boldsymbol{v_n = 9\frac{n-1}{n}}$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não recordarem o significado da operação de ‘reunião’ de conjuntos	É improvável que outros alunos não consigam ajudar a ultrapassar a situação

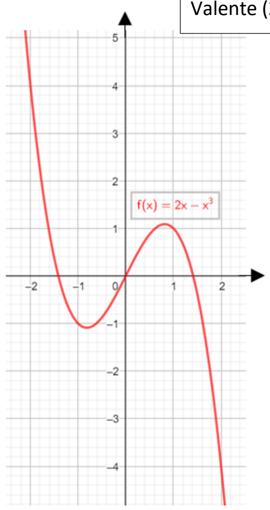
Dificuldades do aluno	Estratégias do professor
Não perceber a distinção entre 'ponto aderente' e 'aderência'	Explicar que são conceitos diferentes, ainda que relacionados. 'Aderência' é a designação adotada para o conjunto de todos os pontos aderentes a determinado conjunto. Ambas as definições constam da ficha de trabalho
Ter dificuldade em definir sucessões que tendam para pontos que, sendo aderentes, não pertençam ao conjunto em análise	O recurso a infinitésimos adequados ajuda normalmente a resolver o problema de forma simples. É muito provável que alguns alunos consigam indicar exemplos
A que propósito surge a definição de ponto aderente no âmbito do limite de funções?	Recordar aos alunos a definição de Heine. Ela supõe a existência de sucessões objeto convergentes para um determinado ponto onde o limite da função está a ser considerado. Ou seja, esse ponto terá, necessariamente, de ser aderente ao domínio da função.

Anexo 4.2: Limites no infinito (exercício de consolidação)

Exercício 4.2: Limites no infinito (exercício de consolidação) (enunciado)

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.24

Seja $\boldsymbol{f}$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $\boldsymbol{f(x) = 2x - x^3}$ e representada graficamente.



a)
Mostra que, se $(\boldsymbol{u_n})$ é uma sucessão que tende para $+\infty$, então a sucessão $(\boldsymbol{f(u_n)})$ tende para $-\infty$.

Será que podes concluir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe? Justifica a tua resposta

b)
Prova que a função $\boldsymbol{f}$ é uma função ímpar e obtém $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercício 4.2: Limites no infinito (exercício de consolidação) (resolução)

a)
É importante que os se apercebam que podem confirmar a afirmação por observação do gráfico da função. Mas também deverão conseguir efetuar a prova analítica.

$f(u_n) = 2u_n - {u_n}^3$ e portanto $\lim f(u_n) = 2\,(\lim u_n) - (\lim u_n)^3$.

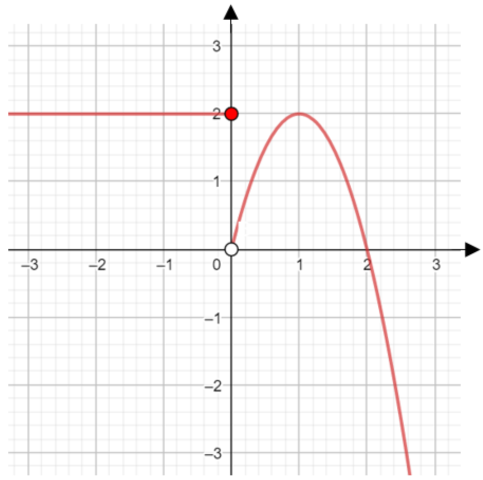
Exercício 4.2: Limites no infinito (exercício de consolidação) (resolução)
A indeterminação $\infty - \infty$ pode ser ultrapassada colocando a sucessão u_n (ou $\lim u_n$) em evidência. Como $(u_n) \to +\infty$, conclui-se que $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n})\right) \to -\infty$. Como a sucessão $\boldsymbol{u_n}$ considerada na demonstração anterior foi qualquer, pode concluir-se, pela definição de Heine, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\infty$ **b)** Uma função f é ímpar se $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, em todo o domínio da função. Em termos gráficos, a função terá de ser simétrica em relação à origem das coordenadas. Portanto a função dada é efetivamente ímpar. Analiticamente: $$f(-x) = 2(-x) - (-x)^3 = -2x + x^3 = -f(x)$$ A simetria da função relativamente à origem obriga a que, em virtude da conclusão na alínea a), $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = +\infty$. Pode chegar-se à mesma conclusão efetuando os cálculos. Procedendo como em **a)** e considerando uma qualquer sucessão $(\boldsymbol{v_n}) \to -\infty$, conclui-se que $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{2x} - \boldsymbol{x^3} = +\infty$.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Alguns alunos podem não conseguir perceber como formular analiticamente a resposta à alínea **a)**, embora deem a resposta correta a partir da observação gráfica	Uma vez que a sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ não é conhecida, é inevitável o recurso à álgebra de limites de sucessões, após determinar a expressão da sucessão imagem $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n}))$
Não perceber que a justificação da existência de limite na alínea **a)** decorre diretamente da demonstração efetuada anteriormente	A justificação está no facto da sucessão $\boldsymbol{u_n}$ ser qualquer, por hipótese, pelo que basta recordar o texto da definição de Heine
Não saber o que é uma função ímpar ou, sabendo, não conseguir aplicar a propriedade para obter o limite em menos infinito a partir do limite anteriormente demonstrado. Os alunos tenderão a contornar a imparidade e resolver a alínea b) sem usarem essa propriedade	Tentar obter contribuições da turma que permitam partir da definição de função ímpar e aplicá-la ao caso concreto para efetuar a demonstração solicitada. A análise gráfica (simetria de uma função ímpar) permitirá também antever o resultado

Anexo 4.3: Limites de funções segundo Heine (consolidação)

Exercício 4.3: Limites de funções segundo Heine (consolidação) (enunciado)

No referencial está representada parte do gráfico de uma função $\boldsymbol{g}$, com domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que o gráfico de $\boldsymbol{g}$ é a reunião de uma semirreta com parte de uma parábola.



a)
Será que existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$? Justifica a tua decisão

b)
Indica o valor de $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ e de $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

c)
Indica o termo geral de uma sucessão

c1)
(u_n) tal que $\big(g(u_n)\big) \to 2$.

c2)
(v_n) tal que $\big(g(v_n)\big) \to -\infty$

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.25

Exercício 4.3: Limites de funções segundo Heine (consolidação) (resolução)

a)
Os alunos poderão indicar um infinitésimo alternado (ou oscilante) para provar que a função não tem limite em zero. Outros alunos encontrarão infinitésimos à esquerda e à direita de zero para chegar à mesma conclusão. Outros ainda, recorrerão aos limites laterias no ponto zero.
Tentarei em todos os casos lembrar a definição de Heine e por exemplo o facto de $g(0)$ ser diferente do limite lateral direito

b)
Não prevejo aqui qualquer dificuldade. Podem no entanto haver alunos que não identifiquem imediatamente que $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 2$.
Também convém frisar que a conclusão $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ se fundamenta no conhecimento de que a parte direita do gráfico é um troço de parábola (invertida).

c)
Em relação à sucessão u_n , é provável que poucos alunos se lembrem de indicar sucessões cujas imagens caiam na parábola. Espero que indiquem sucessões como $-n$ e, talvez, sucessões constantes sobre o semieixo negativo das abcissas.
Para a sucessão v_n não deverão faltar exemplos, como por exemplo n , n^2 , n^3, etc.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não se preveem neste exercício dificuldades diferentes das encontradas em exercícios semelhantes feitos anteriormente. A presença do ramo constante pode no entanto 'embaraçar' alguns alunos	Os alunos não devem hesitar em usar a sucessão constante sempre que a mesma se revele adequada à resolução de um problema. É uma sucessão como qualquer outra, ainda por cima mais simples
Na alínea **c)** alguns alunos poderão ter dificuldades em raciocinar a partir da sucessão imagem, pois isso implica aplicar a função inversa (ou partir do eixo dos $\boldsymbol{yy}$ para o eixo dos $\boldsymbol{xx}$)	Poderá por exemplo ser útil desafiar os alunos a assinalar no gráfico sucessões imagem a tender para 2 e indicarem então exemplos para as correspondentes sucessões objeto (quer por meio da semirreta, quer da parábola)
Será que os alunos se aperceberão que existem sucessões cujas imagens tendem para 2 quer na parábola quer na região da semirreta?	A sucessão $\boldsymbol{1+\frac{(-1)^n}{n+1}}$ por exemplo tem imagem tendente para 2. O mesmo sucede com a sucessão "$\boldsymbol{-n}$" ou com as sucessões constantes "$\boldsymbol{0}$" ou "$\boldsymbol{-a}$" (com $a \geq 0$)
Uma variante a explorar será fazer deslocar a semirreta para o semieixo negativo das abcissas, mantendo a imagem de zero igual a 2	Reanalisar então com a turma o limite da função no ponto zero, nomeadamente a questão do que varia quando o zero pertence ou não ao domínio e o papel da imagem de zero na existência de limite

Anexo 4.4: Propriedades operatórias dos limites (exercícios)

Exercício 4.4: Propriedades operatórias dos limites (enunciado)
Calcula os seguintes limites: Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.30,32 **a)** $\lim_{x\to -1}(x^2-3x+x^3)$ **b)** $\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{2-x}$ **c)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2+x}$

Exercício 4.4: Propriedades operatórias dos limites (resolução)
a) Tratando-se de uma função polinomial, a solução sai diretamente dos teoremas sobre limites relativos à função constante, limite da soma e limite do produto. $$\lim_{x\to -1}(x^2-3x+x^3)=(-1)^2-3(-1)+(-1)^3=3$$ **b)** Relativamente ao exercício anterior, basta acrescentar a aplicação do teorema do limite do quociente. O facto de estarmos perante um limite lateral não altera as propriedades operatórias sobre limites enunciadas. $$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{2-x}=\frac{2^+}{2-2^+}=\frac{2^+}{0^-}=-\infty$$ **c)** Procedendo tal como na alínea anterior $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{0^+-1}{(0^+)^2+0^+}=\frac{(-1)^+}{0^+}=-\infty$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Proceder à simples substituição do valor da variável na expressão, sem invocar os teoremas sobre álgebra de limites	Lembrar à turma que a substituição simples está suportada em teoremas. Por outro lado, os alunos têm de perceber o que estão a fazer, pois a substituição direta e acrítica pode conduzir a erros
Dificuldades quando a expressão envolve limites laterais e o limite não é finito	Para os limites laterais aplicar a notação que nos permite fixar de que lado do valor limite nos estamos a aproximar, de forma a melhor nos apercebermos de mudanças de sinal da expressão
Verificar se o ponto para o qual se está a calcular o limite é aderente à expressão que traduz a função	No caso das funções racionais é frequente a exclusão de pontos por não pertencerem ao domínio da função. No entanto isso não invalida a possibilidade de existir limite nesses pontos, caso os mesmos sejam aderentes ao domínio
Sugestionados por exercícios anteriores, alguns alunos tenderão a aplicar diretamente a definição de Heine	Embora este procedimento seja correto e deva conduzir à solução do exercício, a vantagem de demonstrar teoremas é precisamente poder aplicá-los e, com isso, resolver problemas mais rapidamente e com menos possibilidade de cometer erros

Anexo 4.5: Álgebra dos limites (exercício de consolidação)

Exercício 4.5: Álgebra dos limites (exercício de consolidação) (enunciado)

Seja $\boldsymbol{g}$ uma função, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.33

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -3$
- $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = +\infty$

Determina os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x}{g(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{x-g(x)}{x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to-2^-} \sqrt{\frac{x.g(x)}{x+2}}$

Exercício 4.5: Álgebra dos limites (exercício de consolidação) (resolução)

a)
Aplicando a álgebra dos limites de funções, nomeadamente o teorema do limite do quociente, e atendendo ao comportamento enunciado da função $g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)}{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)} = \frac{+\infty}{-3} = -\infty$$

b)
Exatamente da mesma forma, alertados para os cuidados de análise a ter quando se trata de limites laterais

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x-g(x)}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to-2^-}(x-g(x))}{\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)} = \frac{-2^- - \lim\limits_{x\to-2^-} g(x)}{-2^- + 2} = \frac{-2^- - (+\infty)}{0^-} = +\infty$$

c)
Aplicando agora o teorema do limite da potência e da raiz

$$\lim_{x\to-2^-} \sqrt{\frac{x.g(x)}{x+2}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to-2^-}(x.g(x))}{\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)}} = \sqrt{\frac{(-2^-).\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)}{0^-}} = \sqrt{\frac{-\infty}{0^-}} = +\infty$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Este exercício não introduz dificuldades significativas comparado com o exercício 4. Mas alguns alunos podem sentir-se intimidados em trabalhar com uma função cuja expressão não conhecem	Tentar levar a turma a perceber que não é necessário conhecer mais da função $g(x)$ que o que é dito no enunciado sobre dois dos seus limites. A aplicação direta da álgebra dos limites permitirá concluir que assim é. Portanto, mãos à obra!
Como lidar com o radical que surge numa das funções?	Mais uma vez os teoremas sobre álgebra de limites podem ajudar, evitando recorrer à definição de limite segundo Heine. Chamar a atenção da turma para o facto do limite em causa e o comportamento referido no enunciado para a função $g(x)$ garantirem que o radical (raiz quadrada) existe sempre (recordar que não há raízes quadradas de números negativos)

Anexo 4.6: Ficha de Trabalho nº 4

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Matemática A - 11º Ano - Turma 11º E - Ano Letivo 2018/2019

Limites de Funções Reais de Variável Real

Grupo de Trabalho: ______________________ / ______________________ / ______________

1.

a)

Se $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, será que $\boldsymbol{a}$ é aderente ao conjunto A? Porquê?

b)

Indica justificando qual o conjunto de pontos aderentes (aderência de) de cada um dos seguintes conjuntos:

b1) $A =]2,7[$

b2) $B = \{1, 2, 3\}$

b3) $C = \{-1,0,1\} \cup]2, 7] \cup [8,9[$

Definição de ponto aderente a um subconjunto de $\mathbb{R}$:

Seja **A** um subconjunto de $\mathbb{R}$ e seja $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Diz-se que **$\boldsymbol{a}$ é ponto aderente a A** se existir uma sucessão de elementos de **A** convergente para $\boldsymbol{a}$.
Também se designa por **aderência de A** o conjunto dos pontos aderentes a **A**.

(ver página 8, volume 3 do teu manual)

Outra definição possível de ponto aderente, equivalente à anterior:

Definição de ponto aderente a um subconjunto de $\mathbb{R}$:

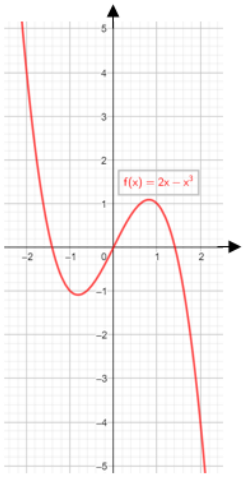
Seja **A** um subconjunto de $\mathbb{R}$ e seja $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Diz-se que **$\boldsymbol{a}$ é ponto aderente a A** se em qualquer **vizinhança de $\boldsymbol{a}$** existir pelo menos um elemento do conjunto **A** .

Recorda a definição de vizinhança $\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$ de um ponto $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[}$

Portanto, $x \in V_\delta(a) \Leftrightarrow x \in]a - \delta, a + \delta[\Leftrightarrow |x - a| < \delta$

2.

Seja $\boldsymbol{f}$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f(x) = 2x - x^3}$ e representada graficamente.



a)

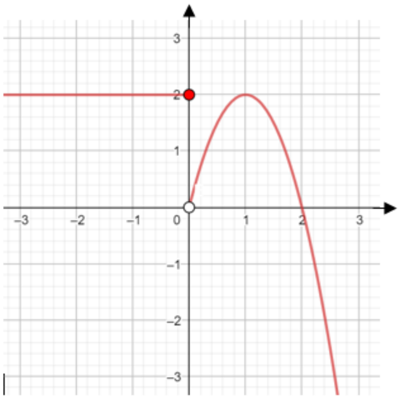
Mostra que, se $(\boldsymbol{u_n})$ é uma sucessão que tende para $+\infty$, então a sucessão $(\boldsymbol{f(u_n)})$ tende para $-\infty$.

Será que podes concluir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe? Justifica a tua resposta.

b)

Prova que a função $\boldsymbol{f}$ é uma função ímpar e obtém $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3.
No referencial abaixo está representada parte do gráfico de uma função $\boldsymbol{g}$, com domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que o gráfico de $\boldsymbol{g}$ é a reunião de uma semirreta com parte de uma parábola.



a)
Será que existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$? Justifica a tua decisão.

b)
Indica o valor de $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ e de $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

c)
Indica o termo geral de uma sucessão

c1)
(u_n) tal que $\big(g(u_n)\big) \to 2$

c2)
(v_n) tal que $\big(g(v_n)\big) \to -\infty$

ESPAN - 11º ano **Ficha de Trabalho nº 4** março 2019

4.
Calcula os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + x^3)$

b) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{2-x}$

c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2+x}$

5.
Seja $\boldsymbol{g}$ uma função, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -3$
- $\lim_{x \to -2^-} g(x) = +\infty$

Determina os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{g(x)}$

b) $\lim_{x \to -2^-} \frac{x-g(x)}{x+2}$

c) $\lim_{x \to -2^-} \sqrt{\frac{x.g(x)}{x+2}}$

Produzido por Fernando Mendes (Mestrado Ensino Matemática – IE-FCUL) Pág. 4 de 4

Anexo 5: Plano de Aula 5

Plano de Aula - 19 de março de 2019

Matemática A

Domínio: Funções Reais de Variável Real
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Sumário(2 tempos = 90 minutos)
▪ Caracterização de uma função racional (definição, domínio e contradomínio) ▪ Operações com funções racionais. Simplificação de frações. ▪ Regras de levantamento de indeterminações no cálculo de limites de funções. ▪ Exercícios de aplicação e consolidação

Objetivos
▪ Definir e identificar uma função/fração racional. Exemplo de fração não racional ▪ Determinação do domínio de uma função racional ▪ Operações envolvendo frações racionais. Reconhecimento de que as quatro operações básicas aplicadas a funções racionais conduzem a funções também racionais ▪ Regras de simplificação de frações racionais ▪ Selecionar e aplicar a regra mais adequada ao levantamento de uma indeterminação ▪ Treinar o levantamento de indeterminações em diferentes tipos de expressões

Conhecimentos Prévios
▪ Propriedades operatórias de limites de funções e situações de indeterminação; ▪ Recordar conceitos fundamentais sobre funções (domínio e contradomínio) ▪ Regras associadas a operações envolvendo frações ▪ Técnicas aplicadas na simplificação de expressões, especialmente os casos notáveis da multiplicação e propriedade distributiva da multiplicação (factorização) ▪ Fatorização de polinómios e regra de Ruffini

Capacidades Transversais
▪ Raciocínio Matemático. Clareza na apresentação simbólica de cálculos e respetivo encadeamento lógico ▪ Resolução de problemas envolvendo a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de regras e procedimentos anteriormente apreendidos, revendo sempre que necessário a estratégia preconizada e interpretando os resultados obtidos ▪ Destreza na manipulação e simplificação de expressões algébricas. ▪ Trabalhar em grupo, aproveitando sinergias geradas pela colaboração e cooperação

Metodologia de Trabalho

- Turma organizada em grupos de trabalho de dois ou três alunos;
- Recordar técnicas de simplificação de frações usando factorização do numerador e denominador. Adição, multiplicação e divisão de frações;
- Apresentação das diferentes situações de indeterminação no cálculo de limites de funções e expor as técnicas conducentes ao respetivo levantamento. Sempre que possível, evidenciar paralelismo com o que foi aprendido para as sucessões;
- Resolução autónoma de exercícios envolvendo simplificação de frações racionais e levantamento de indeterminações encontradas por aplicação da álgebra dos limites;
- Discussão de resoluções selecionadas com toda a turma, sistematização de resultados e conclusões

Avaliação

- A produção dos alunos será analisada e avaliada através de gravação áudio e fotos da atividade de resolução de alguns grupos de trabalho;
- Serão igualmente registadas notas de campo baseadas na atividade e comportamento geral da turma em aspetos como
  - Pontualidade;
  - Interesse e participação nas atividades propostas;
  - Cooperação e espírito de entreajuda no trabalho em grupo;
  - Aplicação e integração de conhecimentos anteriores nos novos conteúdos;
  - Utilização correta de simbologia e linguagem matemática
  - Comportamento em sala de aula
- No final da aula número 6 haverá um miniteste de avaliação sumativa, com duração aproximada de 20 minutos, endereçando o tópico dos limites de funções reais de variável real. O miniteste será resolvido pelos mesmos grupos de trabalho das aulas anteriores

Recursos

- Por parte do **Professor**:
  - Canetas de cores distintas (mínimo 2 cores);
  - Manual da disciplina adotado pela escola (volume 3);
  - Tarefas e exercícios a propor aos alunos (Ficha de Trabalho nº 5);

- Por parte do **Aluno**:
  - Caderno diário de apontamentos;
  - Calculadora gráfica

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Início da aula com revisões sobre regras de simplificação de frações racionais. Apresentação de alguns exemplos de operações com frações e recordar técnicas de levantamento de indeterminações aplicadas no cálculo de limites de sucessões	10-15
▪ Distribuição da 'Ficha de Trabalho nº 5', solicitando à turma a resolução dos exercícios 1 e 2 (simplificação de expressões algébricas)	5-10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 1, com discussão para esclarecimento de dúvidas	5
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 2, com discussão para esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Resolução autónoma das alíneas do exercício 3 (três indeterminações distintas do tipo $\infty - \infty$)	10
▪ Apresentação no quadro de resoluções das alíneas 3.a) e 3.b), seguida de esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução da alínea 3.c), seguida de discussão e esclarecimento de dúvidas	5-10
▪ Resolução autónoma das alíneas do exercício 4 (três indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e a alínea final com indeterminação do tipo $\infty - \infty$)	10
▪ Apresentação de resoluções selecionadas do exercício 4 no quadro, seguida de esclarecimento de dúvidas	10
▪ Resolução autónoma das alíneas do exercício 5 (indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$)	10
▪ Apresentação de resoluções selecionadas do exercício 5 no quadro, seguida de esclarecimento de dúvidas; ▪ Síntese e encerramento da aula	10

Desenvolvimento da Aula
▪ ***Início da aula*** A aula começa com uma revisão rápida dos casos notáveis da multiplicação, bem como de exemplos de simplificação de frações por factorização das expressões do numerador e denominador. Recorda-se também as regras de adição, multiplicação e divisão de frações. A revisão termina com uma recordatória das regras de levantamento de indeterminações de sucessões, diretamente aplicáveis a limites de funções no infinito (isto é, quando a variável independente tende para infinito)

Desenvolvimento da Aula

- ***Início da resolução dos exercícios 1 e 2, em grupos de trabalho autónomo de dois ou três alunos***

Pede-se à turma que inicie a resolução dos exercícios 1 e 2 da ficha de trabalho. O exercício 1 permite treinar a simplificação de frações racionais por factorização do numerador e denominador, técnica comum no levantamento de algumas indeterminações (por exemplo a do tipo $\frac{0}{0}$). Já o exercício 2 explora operações entre frações racionais, recurso também frequente para ultrapassar indeterminações (por exemplo do tipo $\infty - \infty$ ou $0 \times \infty$).

O Professor acompanha a resolução dos alunos, esclarecendo dúvidas e desbloqueando situações que impeçam os grupos de prosseguir a resolução. Observa também as diferentes estratégias adotadas e seleciona resoluções que possam ter interesse na posterior discussão com toda a turma.

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão do exercício 1***

Não se espera grande dificuldade na resolução deste exercício, pelo menos por alguns alunos, uma vez que foram apresentadas várias 'dicas', como fatorizar os polinómios, descobrir uma raiz e aplicar a fórmula resolvente para equações do segundo grau. É no entanto possível que alguns grupos manifestem bloqueamentos no processo de resolução devido a não dominarem aquelas técnicas.

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão (exercício 2)***

Este exercício deverá ser abordado pelos alunos com relativa facilidade. É possível que alguns alunos hesitem na forma de dividir frações bem como na identificação dos casos notáveis (embora os exemplos apresentados sejam muito simples). O maior obstáculo parece-me poder ser a adição de frações racionais, mas é possível que os exemplos dados na introdução da aula sejam suficientes para alguns grupos avançarem na resolução.

- ***Resolução autónoma das alíneas do exercício 3***

Este exercício apresenta as primeiras situações de levantamento de indeterminação de limites de funções. As técnicas a aplicar já foram treinadas nos exercícios 1 e 2. Assim, como introdução a este exercício apresentarei alguns exemplos rápidos de técnicas de levantamento de indeterminações do tipo $\infty - \infty$, bem como o teorema relativo ao limite da função polinomial, como extensão imediata e natural do teorema correspondente já aprendido para as sucessões. Penso que será suficiente, em conjunção com o meu acompanhamento e apoio permanente aos grupos de trabalho, para que a maioria dos alunos possa iniciar a resolução do exercício.

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão (exercícios 3)***

A alínea 3.a) deverá ser resolvida sem grande hesitação, colocando o termo x^4 em evidência ou aplicando diretamente o teorema de determinação de limites para funções polinomiais. Neste último caso podem haver alunos que se esqueçam de simplificar/reduzir primeiro o polinómio, já que esta possui dois termos em x^4. Alguns alunos podem igualmente sentir desconforto pela presença de π ou mesmo tentar substituí-lo por um valor aproximado.

A alínea 3.b) é muito simples, mas selecionarei soluções que não contemplem o facto de ambas as frações terem já o mesmo denominador, a menos de uma mudança de sinal. Ou seja, a indeterminação $\infty - \infty$ pode ser imediatamente ultrapassada somando as frações

Desenvolvimento da Aula

após inversão de sinal de um dos denominadores. Os grupos que optarem pela receita padrão de igualar denominadores (sem reparar que eles já são 'iguais') vai ingressar em cálculos que propiciam erros e tornam a resolução muito mais demorada. Este é pois um exemplo ilustrativo de que vale a pena pensar antes de simplesmente agir.

Finalmente, a alínea 3.c) ilustra uma função com radicais onde aparece uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Aqui a estratégia passa por fazer desaparecer a diferença de radicais através da multiplicação pelo binómio conjugado, uma vez que isso conduz ao cancelamento de x e o conjugado, sendo uma adição, não patenteia qualquer indeterminação. É importante que os alunos percebam a razão do sucesso desta estratégia e não a apliquem simplesmente como a receita usual quando estão presentes radicais.

- ***Resolução autónoma do exercício 4, seguida de apresentação de resoluções e discussão com a turma***

As alíneas 4.a) e 4.b) podem resolver-se através do teorema relativo ao levantamento de indeterminações do tipo $\infty - \infty$ para funções racionais, à semelhança do que foi enunciado para as sucessões. Mostrarei um exemplo ilustrativo perante a turma, afirmando que a extensão a funções racionais é imediata. Deixo aos alunos a superação da dificuldade colocada pelos módulos na alínea b), nomeadamente como podem ser removidos quando x fica 'suficientemente' negativo.

Maior desafio constituirão certamente as alíneas 4.c) e 4.d), ambas apresentando radicais. Aqui a mensagem deverá ser que a de que a multiplicação pelo binómio conjugado, como forma de eliminar radicais pode ou não resultar. Resulta por exemplo na alínea 4.d), mas já não é uma boa estratégia para a alínea 4.c). Os alunos poderão experimentar essa solução em ambos os casos, desde que percebam porque é que não obtêm o mesmo sucesso em cada um deles. É o que tentarei fazer e transmitir durante a correção.

- ***Resolução autónoma das alíneas do exercício 5***

Os exemplos apresentados neste exercício destinam-se fundamentalmente a consolidar as técnicas de levantamento de indeterminações de limites de funções. É possível que muitos alunos não consigam chegar ao exercício 5. Resolvi considerá-lo quer como desafio adicional para alunos mais eficientes, quer como proposta para ser trabalhada em casa e posteriormente corrigida em aula, aproveitando as dúvidas e dificuldades colocadas que venham então a ser colocadas.

O exercício exibe exemplos das indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$, ainda não trabalhados autonomamente na turma. Apenas chamarei a atenção para o facto, já abordado nas sucessões, de que a indeterminação $0 \times \infty$ se deve converter previamente numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (conforme nos parecer mais conveniente) , seguindo depois as técnicas já conhecidas.

Sobre a alínea 5.b), sem dúvida a que prevejo possa criar mais dificuldades, apenas recordarei que, na determinação de limites, apenas interessa o comportamento da função (ou da sucessão) 'suficientemente' perto do valor para que converge a variável independente ('x' para as funções e 'n' para as sucessões, como são normalmente designada).

Desenvolvimento da Aula

- ***Apresentação de resoluções do exercício 5 e respetiva discussão. Conclusão da aula***

Como referido, é possível que parte ou a totalidade do exercício 5 não possa ser corrigido em aula. Nesse caso proporei que as alíneas restantes sejam resolvidas em casa, procedendo-se numa aula posterior à respetiva correção crítica, partindo das dificuldades descritas pelos alunos que tentaram ou concluíram a resolução.

É fundamental reservar alguns minutos no final da aula para resumir os diferentes tipos de indeterminações encontrados nos limites de funções e as técnicas disponíveis para o levantamento caso a caso. Salientar também que nem sempre a técnica selecionada tem sucesso, podendo ser necessário recomeçar ou complementar com o recurso a outra. Em qualquer caso, o aluno deve sempre ter uma atitude crítica sobre os resultados que pretende alcançar quando toma uma opção para levantar qualquer indeterminação.

Anexo 5.1: Simplificação de frações racionais

Exercício 5.1: Simplificação de frações racionais (enunciado)

1.
Simplifica cada uma das seguintes frações racionais e indica o domínio em que a simplificação é válida.

Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.35

a)

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$$

b)

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Exercício 5.1.a): Simplificação de frações racionais (resolução)

A simplificação deste tipo de expressões passa pela fatorização de numerador e denominador e eventual deteção de fatores comuns. A factorização do denominador é imediata, atendendo a que se trata de um caso notável da multiplicação.

Analisando o numerador verifica-se que tem raiz 1 (raiz comum ao denominador). Usando a regra de Ruffini ou a fórmula resolvente, fatoriza-se o numerador.

$$\frac{2(x-1)(x-\frac{1}{2})}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2(x-\frac{1}{2})}{x+1} = \frac{-2x+1}{x+1}$$

Quanto ao domínio da expressão, será $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, visto não ser possível nos reais a divisão por zero. A simplificação/corte efetuada também só é válida porque $x \neq 1$.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não identificar o caso notável e portanto não encontrar logo as raízes do denominador (os alunos estão habituados a ver os polinómios ordenados pelo grau dos seus monómios)	Lembrar que para mais facilmente fatorizar um polinómio convém descobrir pelo menos uma raiz. Será mais fácil fazê-lo para o numerador ou denominador?
Dificuldades em fatorizar o numerador, talvez por não perceber que isso pode ser conseguido pela fórmula resolvente de equações do segundo grau	Como se descobrem facilmente as raízes, caso existam, de polinómios do segundo grau? Recordar que uma raiz é o valor que zera o polinómio.
Os alunos que optem pela fórmula resolvente podem não conseguir reconstruir o polinómio a partir das raízes encontradas, nomeadamente por esquecerem o fator 2	Pedir ao aluno para 'desfatorizar' o polinómio fatorizado a que chegou e confirmar se obtém o polinómio constante do numerador da expressão. Qual deverá ter sido o erro e porquê? Reconhecer/recordar que multiplicar um polinómio por qualquer fator não nulo não altera as suas raízes.
Não identificar o fator comum a cortar, pelo fato de este se apresentar com sinais diferentes no numerador e denominador	Mostrar que a fatorização não terminou e que é possível ainda colocar o fator (-1) em evidência numa das expressões. Então o fator comum torna-se evidente no numerador e denominador.
Alunos com mais dificuldades no domínio da álgebra básica podem não reconhecer que $-2x + 1 = 1 - 2x$. Aproveitar para recomendar aos alunos que arrumem os polinómios por ordem decrescente de grau dos monómios constituintes	Recordar a propriedade comutativa da adição aplicada a parcelas algébricas, quer dizer, positivas ou negativas (em que o sinal pertence ao número). O aluno reconhecerá certamente que habitualmente troca, sem estranheza, os monómios constituintes de um polinómio.

Exercício 5.1.b): Simplificação de frações racionais (resolução)
Esta resolução só difere da anterior no facto de não ser possível aplicar a fórmula resolvente ao polinómio do numerador. Desta forma, sendo evidente a raiz 1, o aluno deverá recorrer á regra de Ruffini para identificar o fator do segundo grau. Quanto ao denominador, espera-se que alguns alunos mais treinados reconheçam tratar-se de um quadrado perfeito. A raiz 1 é assim comum a ambos os termos da fração, pelo que a expressão se vai poder simplificar. Usando então a regra de Ruffini e fatorizando diretamente o denominador, obtém-se $$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2+x+1}{x-1}$$

Exercício 5.1.b): Simplificação de frações racionais (resolução)
O domínio da expressão é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, visto não ser possível nos reais a divisão por zero. A simplificação/corte efetuada também só é válida porque $x \neq 1$. A expressão não se pode simplificar mais porque 1 não é raiz do numerador. A fórmula resolvente (ou a calculadora) permitiria concluir que o polinómio do numerador da expressão simplificada nunca se anula (e portanto não pode ser fatorizado em $\mathbb{R}$).

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não saber aplicar a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio do numerador	Espero que alguns alunos da turma o saibam fazer. Recorrerei a eles para o esclarecimento dos colegas em dificuldade.
Hesitar em considerar a fração simplificada como a mais simples possível	Tentar que o aluno reconheça que o numerador não dispõe de raízes, pelo que não pode ser fatorizado. Mesmo que pudesse, claramente não tem a raiz 1, pelo que simplificar mais seria impossível.
Alunos que não reconheçam imediatamente o quadro perfeito no denominador e que tenham também dificuldades em aplicar/interpretar a fórmula resolvente (por exemplo porque o determinante é nulo)	Pedir ajuda à turma. Para alunos mais reticentes, mostrar que a fórmula resolvente confirma que a raiz 1 é dupla.
Será que algum aluno mais curioso vai estranhar que o polinómio de grau 3 do numerador só apresente uma raiz?	Recordar que uma raiz pode repetir-se e que o número de raízes reais não pode exceder o grau do polinómio. Esta regra é verificada para o polinómio de grau 3 que apresenta apenas uma raiz real. Já o denominador apresenta o máximo de raízes reais possível para um polinómio do segundo grau. No caso trata-se de uma raiz dupla. Em resultado da simplificação ambos os polinómios reduzem um grau.

Anexo 5.2: Operações envolvendo frações racionais

Exercício 5.2: Operações envolvendo frações racionais (enunciado)
2. Efetua as operações, simplifica, se possível, as frações racionais obtidas e apresenta o domínio (em que as operações e simplificações são válidas). **a)** $\dfrac{1}{2x+6} - \dfrac{3}{9-x^2}$ Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.36,37

Exercício 5.2: Operações envolvendo frações racionais (enunciado)
b) $$\left(1+\frac{1}{x-1}\right):\frac{2x}{x^2-1}$$

Exercício 5.2.a): Operações envolvendo frações racionais (resolução)
A soma (ou diferença) de frações obriga a que disponham do mesmo denominador. A maioria dos alunos tenderá a não considerar que existam fatores comuns a ambos os denominadores, pelo que procederá ao habitual produto cruzado para obter o denominador comum. Neste caso concreto isso dificulta e torna mais complexa a resolução, pelo que os alunos deverão ser alertados de que devem analisar cuidadosamente as expressões antes de, mecanicamente, aplicarem as receitas habituais. Qualquer dos denominadores pode ser fatorizado antes de iniciar a análise para encontrar o denominador comum (que convém ser o mais simples possível, ou seja, o o m.m.c., bem conhecido quando se efetuam adições de frações numéricas). $$\frac{1}{2(x+3)}-\frac{3}{(3-x)(3+x)}=\frac{x-3}{2(x+3)(x-3)}+\frac{2.3}{2(x+3)(x-3)}=\frac{1}{2(x-3)}=\frac{1}{2x-6}$$ O domínio da expressão, será $\mathbb{R}\setminus\{-3{,}3\}$, visto não ser possível nos reais a divisão por zero. A simplificação/corte efetuada também só é válida porque $x\neq -3$.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não identificar o caso notável e portanto não encontrar logo as raízes de um dos denominadores	Pedir ao aluno para fatorizar x^2-9
Mesmo depois de terem descoberto e fatorizado o caso notável, será que percebem existir uma raiz comum a ambos os denominadores?	Quais as raízes do polinómio denominador $2x+6$? Esse conhecimento pode ser útil? Porquê?
Não conseguir reduzir ambas as frações ao mesmo denominador (mesmo depois de ter apontado as raízes dos polinómios denominadores)	Lembrar as regras de operação entre frações e, se necessário, pedir um exemplo puramente aritmético
Na redução ao mesmo denominador esquecer a raiz comum, procedendo como se tratasse de 'números primos'	Perguntar se acha que está a seguir o caminho mais simples. Não estarás a complicar? Mais uma vez pedir ao aluno que resolva uma situação semelhante mas puramente aritmética (isto é, sem incógnita)

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Esquecer o fator dois no polinómio da primeira fração	Pedir ao aluno para rever os cálculos apresentados. Se necessário, solicitar que compare expressões que está a igualar e que são diferentes
Efetuar 'corte' de fatores comuns sem ter a consciência que o mesmo tem subjacente restrições ao domínio da expressão	Lembrar ao aluno, e se necessário demonstrar com exemplos, que $\frac{0}{0}$ não é igual a 1 (ou melhor, pode não ser). Trata-se, como bem sabe, de uma situação de indeterminação. Além disso, a divisão por zero não é válida em $\mathbb{R}$

Exercício 5.2.b): Operações envolvendo frações racionais (resolução)
Esta alínea não introduz dificuldade adicional relativamente aos exercícios anteriores, obrigando no entanto o aluno a saber efetuar a divisão de duas frações. Ultrapassado este obstáculo, os passos seguintes já foram aplicados nas alíneas anteriores. Antes de trocar a divisão pela multiplicação (pelo inverso da fração quociente) convém também simplificar o dividendo. $$\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right).\left(\frac{(x-1).(x+1)}{2x}\right)=\frac{x}{x-1}.\frac{(x-1).(x+1)}{2x}=\frac{x+1}{2}$$ O domínio da expressão é $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, visto não ser possível nos reais a divisão por zero. A simplificação/corte efetuada também só é válida porque $x\notin\{-1,0\}$.   Notar que, apesar do termo '$x+1$' se manter, isto é, não ter sido 'cortado', a expressão final não está definida para $x=-1$, já que '$x+1$' era um dos fatores (escondido) no denominador de uma fração na expressão inicial (precisamente a fração $\frac{2x}{x^2-1}$).

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Hesitar ou mesmo não conseguir atacar a simplificação da expressão por não se aperceber tratar-se de uma fração de frações	Pedir ao aluno para descrever a expressão. Se necessário, pedir para simplificar uma razão entre duas frações simples, com ou sem a presença exclusiva de valores numéricos
Não conseguir indicar corretamente o domínio da expressão	Pedir ao aluno para percorrer cada igualdade do processo de simplificação e verificar em que condições a mesma é válida. Se necessário, solicitar ao aluno para calcular a expressão inicial nos pontos não pertencentes ao domínio

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Duvidar da igualdade entre a expressão final e a inicial	Afirmar que isso resulta da validade das operações efetuadas. Pedir ao aluno para verificar para dois ou três números do domínio. E depois para fazer o mesmo por exemplo para -1 e zero. O que conclui?

Anexo 5.3: Levantamento de indeterminações do tipo $\infty - \infty$

Exercício 5.3: Levantamento de indeterminações do tipo ∞-∞ (enunciado)
3. Calcula os seguintes limites: Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.38 **a)** $\lim_{x\to+\infty}(x^4 - \pi x^4 - x)$ **b)** $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{1-x}\right)$ **c)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

Exercício 5.3.a): Levantamento de indeterminações do tipo ∞-∞ (resolução)
O levantamento da indeterminação $\infty - \infty$ (que deve ser entendida como $+\infty - \infty$, uma vez que a adição de infinitos com o mesmo sinal não constitui uma indeterminação)para funções polinomiais, segue exatamente as mesmas regras já presentadas e aprendidas pelos alunos a propósito do levantamento da mesma indeterminação em sucessões definidas a partir de polinómios. Desta forma não deverá constituir qualquer surpresa para a turma o enunciado (e aplicação) do teorema que permite levantar esta indeterminação, no caso de funções polinomiais quando a variável independente tende para mais ou menos infinito. $\lim_{x\to+\infty}(x^4 - \pi x^4 - x) = \lim_{x\to+\infty}[(1-\pi)x^4 - x] = \lim_{x\to+\infty}(1-\pi)x^4 = (1-\pi)(+\infty) = -\infty$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não recordar (ou não ter percebido) a técnica de levantamento desta indeterminação para sucessões definidas a partir de polinómios	Fornecer um exemplo com sucessões e confirmar o resultado através da colocação em evidência do termo de maior grau, destacando dessa forma que todos os outros termos se transformam em infinitésimos. Daí a enunciação do teorema para o caso geral
Atrapalhar-se com a presença de π ou substituir π por uma aproximação	Embora a substituição de π não altere o resultado final, transforma a expressão numa expressão distinta da inicial. Explicar que 'pi' é um número como outro qualquer, usa-se um literal porque não é possível representá-lo mostrando todos os seus algarismos
Apresentar o resultado correto, pensar bem, mas ter dificuldade em usar notação adequada e clara	Alertar a turma para a importância de apresentar todos os cálculos e raciocínios de forma clara e sucinta quanto baste
É possível que alguns alunos cheguem ao resultado $+\infty$ por engano nos cálculos	Chamar a atenção dos alunos para a forma como simplificam a expressão $x^4 - \pi x^4$ colocando o x^4 em evidência. Qual o sinal do coeficiente? Porquê?

Exercício 5.3.b): Levantamento de indeterminações do tipo ∞-∞ (resolução)
No caso de indeterminação $\infty - \infty$ quando estão envolvidas funções racionais não polinomiais, o caminho recomendado é efetuar a operação de adição (algébrica), a fim de obter uma fração racional isolada e, dessa forma, conseguir resolver a indeterminação aplicando a álgebra de limites. Os alunos entenderão, com este exercício e os seguintes, a razão do treino inicial acerca de simplificação de frações e operações com funções racionais. $$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-1}\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{1-3}{x-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Na vertente operatória, não prevejo dificuldades distintas das observadas em exercícios anteriores desta aula	Lembrar aos alunos como foram resolvidos exercícios anteriores semelhantes ao apresentado

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Dificuldade em identificar a indeterminação $\infty - \infty$ pelo facto de não concluírem corretamente o efeito sobre cada uma das frações da aproximação de x a um pela direita	Relembrar os conceitos de limites laterais e pedir ao aluno para interpretar (se necessário com apoio gráfico) o efeito sobre $x-1$ quando $x \to 1$. A ideia é levá-lo a concluir que $\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ e que $\lim_{x\to 1^+} 1-x = 0^-$
Alguns alunos poderão não reparar que as frações 'já têm' o mesmo denominador, a menos da multiplicação de uma delas por (-1)	Chamar a atenção para a importância de apresentar todos os cálculos e raciocínios de forma clara e sucinta quanto baste
É possível que alguns alunos cheguem ao resultado $+\infty$ por engano nos cálculos	Mais uma demonstração de que uma simples troca de sinais, por exemplo, pode comprometer completamente uma resolução, em especial nos casos de escolha múltipla

Exercício 5.3.c): Levantamento de indeterminações do tipo ∞-∞ (resolução)
O levantamento da indeterminação do tipo $\infty - \infty$ em expressões envolvendo radicais passa, como quase sempre sucede noutras indeterminações com a presença de radicais, pela aplicação de uma transformação envolvendo o binómio conjugado do termo que contém os radicais (adição ou subtração). A expressão resultante apresenta normalmente uma simplificação que conduz, em muitas situações, levantar a indeterminação. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) = +\infty + \infty = +\infty$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Prevejo que alguns alunos não saibam como abordar o exercício	Darei a sugestão do recurso ao par conjugado, a fim de transformar a expressão numa outra em que os termos (com radicais) responsáveis pela indeterminação sejam modificados de molde a que aquela seja levantada
Não conseguir aplicar a igualdade relativa ao produto de binómios conjugados	Recordar os casos notáveis da multiplicação, em especial aquele que agora nos será útil. Enfatizar que se devem habituar a 'ver' os casos notáveis nos dois sentidos e não apenas no 'sentido' em que são habitualmente apresentados (aliás só assim faz sentido interpretar o sinal '=' em matemática)

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Um ponto interessante será explorar com a turma se o 'corte' efetuado é legítimo, ou seja, se $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ nunca se anula	Levar os alunos a entender que, sendo o limite para mais infinito, a expressão em causa não será nula para x suficientemente grande, ou seja, para efeitos do cálculo do limite o corte é permitido e está correto

Anexo 5.4: Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Exercício 5.4: Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (enunciado)
4. Determina os seguintes limites: Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.39,40 **a)** $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2-x^6}{2x^5+x+1}$$ **b)** $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\|x-1\|+2x}{\|3-x\|}$$ **c)** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}$$ **d)** $$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$$

Exercício 5.4.a): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (resolução)
A indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ representa qualquer indeterminação que envolva um quociente/fração de numerador e denominador infinito, independentemente do sinal de cada um (e daí não se apresentar sinal na designação deste tipo de indeterminação). No caso particular das funções racionais (fração envolvendo funções polinomiais), o levantamento da indeterminação quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$ segue exatamente as mesmas regras enunciadas para moldura semelhante a propósito de limites de sucessões. Sendo assim, não deverá constituir qualquer surpresa para a turma o enunciado (e aplicação) do teorema que permite levantar esta indeterminação, no caso de funções racionais quando a variável independente tende para mais ou menos infinito. Tudo resulta aliás de forma natural do teorema relativo ao limite de funções polinomiais (já enunciado e aplicado no exercício 3.a).

Exercício 5.4.a): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (resolução)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2-x^6}{2x^5+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^6+x^2+2x+1}{2x^5+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^6}{2x^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2}=+\infty$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não se preveem dificuldades neste exercício distintas das ocorridas e já descritas em exercícios anteriores	Levar os alunos a perceber que o levantamento desta indeterminação apenas apela a técnicas já conhecidas e utilizadas, nomeadamente a álgebra de limites

Exercício 5.4.b): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (resolução)
O manuseamento de expressões com módulos coloca naturalmente obstáculos que muitos alunos têm dificuldade em ultrapassar. No caso do cálculo de limites a tarefa está muitas vezes facilitada porque só interessa o comportamento da expressão quando a variável independente está ‘suficientemente próxima’ do limite. Nesse contexto é possível remover adequadamente os módulos presentes e ficamos com uma simples fração racional, caso já anteriormente estudado. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\lvert x-1\rvert+2x}{\lvert 3-x\rvert}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x-1)+2x}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Alguns alunos ficam paralisados perante a presença de módulos, não sabendo como iniciar a resolução do exercício	Recordar que $\lvert a\rvert=\begin{cases} a, se\ a\geq 0\\ -a, se\ a<0\end{cases}$, traduzindo esta definição para os casos $\lvert x-1\rvert$ e $\lvert 3-x\rvert$ apresentados na expressão do exercício
Não saber como libertar a expressão dos módulos, isto é, sobre que troço do módulo optar em cada um dos casos	Uma vez que para o limite só interessa o comportamento da expressão para valores de x ‘perto do limite’ (isto é, muito negativos), que valor terá cada módulo nessas circunstâncias?

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
É possível que alunos mais competentes, possam decidir-se a apresentar as diversas expressões sem módulos em que a expressão inicial se transforma na reta real	Trata-se de uma boa oportunidade para mostrar a validade da decisão mais rápida de substituição dos módulos atendendo ao valor 'muito negativo' de x. Os alunos devem também ser alertados para a conveniência em, com o treino, descobrirem e seguirem as soluções mais rápidas e expeditas
Alunos que tenham chegado a soluções não finitas	Perguntar à turma se esta expressão alguma vez poderia ter limite mais ou menos infinito. Porquê?

Exercício 5.4.c): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (resolução)
Regressamos a expressões com radicais, agora no contexto de uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Muitos alunos se precipitarão em multiplicar pelo binómio conjugado do numerador, a fim de o racionalizar. Depressa descobrirão que não só a indeterminação se mantém, como a expressão se tornou mais complexa. A solução neste caso e tipo de indeterminação, passa frequentemente por simplesmente transformar a fração numa adição (ou produto, conforme o tipo de expressão) de frações (operação inversa à efetuada quando se pretende simplificar uma soma/produto de frações). $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}) = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Muitos alunos tenderão a aplicar a técnica de racionalização multiplicando o numerador pelo seu binómio conjugado	É bom que os alunos explorem caminhos que se revelem inadequados ou que tornem a resolução mais complexa. Neste caso chamar a atenção para o facto da estratégia seguida não resultar, precisamente por não estar suportada em qualquer 'intenção'. O numerador simplifica-se mas mantém a variável x e o denominador fica mais complexo
Hesitar em aplicar a álgebra dos limites, nomeadamente a que envolve radiciação	Sendo o limite para mais infinito, não se coloca qualquer restrição a nível dos radicais. Por outro lado, neste contexto, a álgebra dos limites assegura que o limite do radical é igual ao radical do limite

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Alunos conduzidos a um resultado distinto de 1	Questionar a turma se o limite indicado alguma vez poderia ser diferente de um. Porquê? A resposta reside no que se aprendeu com quocientes de polinómios de igual grau. Neste caso não temos polinómios, mas o grau da variável x no numerador e denominador é igual a $\frac{1}{2}$, pelo que é de esperar que tendam para infinito 'ao mesmo ritmo'

Exercício 5.4.d): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (resolução)
Este exercício não constitui à partida uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ mas sim do tipo $\infty - \infty$. O seu interesse está no facto de, na sequência do levantamento da indeterminação inicial, surgir nova indeterminação, agora efetivamente do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que estamos a tratar e explorar com os alunos.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2+x})(x+\sqrt{x^2+x})}{x+\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2}$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não simplificar corretamente a expressão $(x-\sqrt{x^2+x})(x+\sqrt{x^2+x})$ ou não conseguir identificar o binómio conjugado da expressão apresentada no exercício	Lembrar o caso notável de produto de binómios conjugados e alertar os alunos para não se intimidarem pela presença de radicais, o que neste caso concreto até conduz a uma grande simplificação da expressão inicial
É expectável que alguns alunos optem por tentar levantar a indeterminação colocando o x em evidência	Mostrar que embora se trate de um caminho atrativo, não conduz ao levantamento da indeterminação nem sequer a uma simplificação da expressão inicial. Por isso deve ser abandonado procurando-se uma alternativa
Hesitar em aplicar a álgebra dos limites, nomeadamente a que envolve radiciação	Tal como no exercício anterior, lembrar que a álgebra dos limites se aplica sem restrições, uma vez que a variável x tende para mais infinito, não comprometendo o cálculo da raiz quadrada

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Alunos que fiquem surpreendidos por partirem da indeterminação $\infty - \infty$ e chegarem a outra indeterminação	Uma vez que a nova indeterminação é distinta da anterior, isso pode ser um progresso, uma vez que diferentes tipos de indeterminação têm normalmente formas diferentes de ser abordadas

Anexo 5.5: Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$

Exercício 5.5: Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$ (enunciado)

Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.41,42,43

5.
Calcula:

a)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x}{2x^2 - x - 3}$$

b)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{|2 - x| - 1}$$

c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2 - \sqrt{x + 3}}$$

d)

$$\lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$$

e)

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{3}{x^2 - 2x} \cdot \frac{x^2 - 4}{2}\right)$$

Exercício 5.5.a): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$ (resolução)

A indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ resolve-se, na maioria das vezes, através da factorização do numerador e do denominador, seguida do cancelamento dos fatores comuns. Desta forma, os exercícios que se seguem são muito parecidos, em termos de técnicas de resolução, aos já apresentados á turma na presente ficha de trabalho. No caso concreto desta alínea, ressalta a raiz -1 comum a numerador e denominador. A raiz pode ser descoberta por inspeção ou inferida, dado ser ela que provoca o aparecimento dos zeros da indeterminação (quando a variável independente ‘atinge’ o limite).

Exercício 5.5.a): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$ (resolução)
$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{2(x-\frac{3}{2})(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x}{2(x-\frac{3}{2})} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não conseguir fatorizar o numerador ou o denominador	No caso do numerador é elementar e será fácil a ajuda por um colega da turma. No caso do denominador, recordar a utilização da fórmula resolvente. Chamar no entanto a atenção para o valor que provoca o anulamento de ambas as expressões (e por isso é uma raiz)
Alguns alunos podem 'esquecer' o fator 2 no denominador e com isso serem conduzidos á solução errada $\frac{1}{10}$	Trata-se de um erro muito frequente. Recordar que a fórmula resolvente apenas conduz às raízes. Estas não se alteram se multiplicarmos a expressão fatorizada por qualquer número real não nulo
Qual a razão por que é lícito 'cortar' a expressão $(x+1)$?	Porque o ponto $x=-1$ apesar de ser aderente ao domínio da expressão não lhe pertence, isto é, a expressão não está definida para $x=-1$

Exercício 5.5.b): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$ (resolução)
Nova expressão contendo um módulo, desta feita no âmbito de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. A resolução não oferece qualquer dificuldade para além de livrar a expressão da presença do referido módulo. Este dissolve-se de imediato se atentarmos a que o limite só depende do comportamento da função 'suficientemente perto' do ponto de abcissa 3. Desta forma é correto efetuar a substituição $\|2-x\| = -(2-x)$. O resto é trivial. $$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\|2-x\|-1} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-(2-x)-1} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não reconhecer tratar-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$	Pedir ao aluno para aplicar a álgebra dos limites à expressão. Se o aluno resolver corretamente o módulo, isto é, se considerar os dois troços, verificará que um deles levanta a indeterminação

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Alunos que não consigam resolver corretamente o módulo	Apelar para o exercício 4.b) desta mesma ficha de trabalho, onde o assunto foi detalhado
Qual a razão porque é lícito 'cortar' a expressão $(x-3)$?	Pelo menos alguns alunos deverão responder corretamente a esta questão, uma vez que foi levantada na alínea anterior

Exercício 5.5.c): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$ (resolução)

Este exercício apela ao recurso ao caso notável do produto de binómios conjugados mas envolve alguma dificuldade, uma vez que exige perspicácia do aluno em 'descobrir' que $(\sqrt{x}-1)$ e $(x-1)$ têm um fator comum. Ou seja, o exercício não exige informação diferente da que já foi trabalhada em casos anteriores desta ficha, mas poderá bloquear alunos com pouca prática ou menos sagazes.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2+\sqrt{x+3})}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2+\sqrt{x+3})}{-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} -\frac{2+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+1} = -2$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não reconhecer tratar-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$	Pedir ao aluno para aplicar a álgebra dos limites à expressão
Separar a expressão na diferença de duas frações	Trata-se de uma tentativa com sentido mas não conduz ao levantamento da indeterminação, surgindo uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$ que recomenda voltar à expressão inicial
Aluno opta pela decisão certa, mas não repara que $x-1$ (ou $1-x$) pode ser transformado numa diferença de quadrados	Tentar obter ajuda da turma e, em caso de insucesso, lançar algumas 'dicas' que permitam sugestões conducentes ao objetivo
Qual o domínio da função/expressão?	Basta resolver a equação $\sqrt{x+3} = 2$. Alguns alunos poderão ter dificuldades em responder, mas espero que seja possível obter a resposta consultando a turma

Exercício 5.5.d): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$ (resolução)
O único propósito deste exercício é familiarizar os alunos para a presença de expressões com radicais no cálculo de limites, inclusivamente no limite da variável independente. De resto não introduz qualquer dificuldade adicional relativamente a casos anteriores. $$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}}(x+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não reconhecer tratar-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$	Pedir ao aluno para aplicar a álgebra dos limites à expressão
Alguns alunos (ou até a maioria) poderão optar pela resolução alternativa de multiplicar pelo binómio conjugado $(x+\sqrt{2})$	Trata-se de um caminho perfeitamente correto, mas deverão existir alunos na turma que apontem para a solução (ligeiramente) mais simples de constatar que já existe uma diferença de quadrados no numerador
Chamar a atenção dos alunos para o facto do domínio da expressão não ser $\mathbb{R}$ mas sim $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$, o que permite a simplificação efetuada	Alguns alunos podem ser levados a pensar que as expressões $\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ e $(x+\sqrt{2})$ são iguais em $\mathbb{R}$,o que é obviamente falso

Exercício 5.5.e): Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$ (resolução)
Este é o primeiro exercício em que surge a indeterminação do tipo $\mathbf{0} \times \infty$. Não deverá constituir grande dificuldade para a turma, uma vez que a mesma já foi informada de que este tipo de indeterminação se levanta transformando-a num dos tipos, $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, já anteriormente trabalhados. $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{x^2-2x} \cdot \frac{x^2-4}{2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{3(x^2-4)}{2(x^2-2x)} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{2x(x-2)} = \frac{3.4}{2.2} = 3$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não reconhecer tratar-se de uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$	Pedir ao aluno para aplicar a álgebra dos limites à expressão. No caso concreto obterá $\infty \times 0$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Alunos com dificuldade em manusear a expressão no sentido de levantar a indeterminação	O que sucede se efetuarem o produto das duas frações racionais?
Não reconhecer que o domínio da expressão é $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$	Para que valores de x a expressão não está definida em $\mathbb{R}$? Espero que vários alunos da turma respondam corretamente à questão

Anexo 5.6: Ficha de Trabalho nº 5

FECB

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Matemática A - 11º Ano - Turma 11º E - Ano Letivo 2018/2019

Limites de Funções Reais de Variável Real

Grupo de Trabalho: ______________________ / ______________________ / ______________

1.
Simplifica cada uma das seguintes frações racionais e indica o domínio em que a simplificação é válida:

a) $\frac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$

b) $\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

2.
Efetua as operações, simplifica, se possível, as frações racionais obtidas e apresenta o domínio (em que as operações e simplificações são válidas):

a) $\frac{1}{2x+6} - \frac{3}{9-x^2}$

b) $\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) : \frac{2x}{x^2-1}$

3.
Calcula os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - \pi x^4 - x)$

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

4.

Determina os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2-x^6}{2x^5+x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x-1|+2x}{|3-x|}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+x})$

5.

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+x}{2x^2-x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x-3}{|2-x|-1}$

c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

d) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{3}{x^2-2x} \cdot \frac{x^2-4}{2}\right)$

Anexo 6: Plano de Aula 6

Plano de Aula - 25 de março de 2019

Matemática A

Domínio: Funções Reais de Variável Real
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Sumário(2 tempos = 90 minutos)
▪ Exercício de aplicação e consolidação sobre limites de funções ▪ Produto de uma função limitada por outra de limite nulo. ▪ Exploração do conceito de limite no estudo da dízima 0,999(9) ▪ Miniteste de avaliação sumativa

Objetivos
▪ Apresentação do teorema do produto de uma função limitada por uma função convergente para zero, com exercícios de exemplificação e consolidação ▪ Exercício de aplicação sobre limites de funções racionais, envolvendo determinação do valor de uma incógnita ▪ Tarefa exploratória sobre a aplicação do conceito de limite a dízimas infinitas periódicas de período 9 ▪ Miniteste de avaliação da aprendizagem do conceito de limite de uma função e aquisição de competências na sua aplicação à resolução de exercícios

Conhecimentos Prévios
▪ Propriedades operatórias de limites de funções e situações de indeterminação; ▪ Recordar conceitos fundamentais sobre funções (máximo, mínimo, majorante, minorante, ser ou não limitada) ▪ Relacionar dízimas e números racionais ▪ Ter presente as definições de limite de uma sucessão e de uma função e forma de as aplicar na avaliação da existência de limite

Capacidades Transversais
▪ Raciocínio Matemático. Clareza na apresentação simbólica de cálculos e respetivo encadeamento lógico ▪ Resolução de problemas envolvendo a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de regras e procedimentos anteriormente apreendidos, revendo sempre que necessário a estratégia preconizada e interpretando os resultados obtidos ▪ Destreza na manipulação e simplificação de expressões algébricas. ▪ Comunicação Matemática. Expor ideias de modo claro, conciso e coerente, quer verbalmente quer por escrito, utilizando sempre que possível e de forma apropriada a notação e simbologia próprias da disciplina.

Capacidades Transversais
▪ Trabalhar em grupo, aproveitando sinergias geradas pela colaboração e cooperação

Metodologia de Trabalho
▪ Turma organizada em grupos de trabalho de dois ou três alunos; ▪ Mobilizar e explorar de forma ajustada os conhecimentos (teoremas, técnicas, procedimentos) já adquiridos sobre limites de sucessões e funções; ▪ Resolução autónoma de exercícios pelos grupos de trabalho; ▪ Discussão de resoluções selecionadas com toda a turma, sistematização de resultados e conclusões; ▪ Resolução do miniteste pelos mesmos grupos de trabalho que trabalharam o tema limites de funções reais de variável real

Avaliação
▪ A produção dos alunos será analisada e avaliada através de gravação áudio e fotos da atividade de resolução de alguns grupos de trabalho; ▪ Serão igualmente registadas notas de campo baseadas na atividade e comportamento geral da turma em aspetos como ○ Pontualidade; ○ Interesse e participação nas atividades propostas; ○ Cooperação e espírito de entreajuda no trabalho em grupo; ○ Aplicação e integração de conhecimentos anteriores nos novos conteúdos; ○ Utilização correta de simbologia e linguagem matemática ○ Comportamento em sala de aula ▪ No final da aula haverá um miniteste de avaliação sumativa, com duração aproximada de 20 minutos, endereçando o tópico dos limites de funções reais de variável real. O miniteste será resolvido pelos mesmos grupos de trabalho das aulas anteriores

Recursos
▪ Por parte do **Professor**: ○ Canetas de cores distintas (mínimo 2 cores); ○ Manual da disciplina adotado pela escola (volume 3); ○ Tarefas e exercícios a propor aos alunos (Ficha de Trabalho nº 6); ▪ Por parte do **Aluno**: ○ Caderno diário de apontamentos; ○ Calculadora gráfica

Momentos de Aula	**Tempo (minutos)**
▪ Início da aula com uma breve revisão do tema principal das duas aulas anteriores: técnicas de levantamento de indeterminações. Breve apresentação do teorema do produto de uma função limitada por outra de limite nulo.	10
▪ Distribuição da 'Ficha de Trabalho nº 6', solicitando à turma a resolução dos exercícios 1 e 2	10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 1, com discussão para esclarecimento de dúvidas	10
▪ Apresentação no quadro de uma resolução do exercício 2, com discussão para esclarecimento de dúvidas	15
▪ Apresentação do exercício 3. Resolução autónoma do mesmo pelos grupos de trabalho	10
▪ Apresentação no quadro de resoluções das alíneas do exercício 3, seguida de esclarecimento de dúvidas	15-20
▪ Miniteste de avaliação sumativa sobre o tema limites de funções reais de variável real	15-20

Desenvolvimento da Aula

- ***<u>Início da aula</u>***

Parece-me importante confrontar a turma com uma síntese rápida do que foi apreendido nas duas últimas aulas, especialmente no que respeita à identificação de indeterminações e estratégias para as levantar. Acentua-se também, de novo, a evolução natural das regras já aprendidas e aplicada aquando do estudo das sucessões. Esta introdução tem também a vantagem de preparar a turma para o exercício 1, onde surge uma variante face à ênfase mais operatória dos exercícios anteriores: a indeterminação associada a uma fração racional já está levantada e pretende-se que o aluno identifique uma das funções polinomiais que integram o quociente.

- ***<u>Início da resolução dos exercícios 1 e 2, em grupos de trabalho autónomo de dois ou três alunos</u>***

Apresentação muito breve à turma dos exercícios 1 e 2 da ficha de trabalho, solicitando de seguida que os grupos de trabalho iniciem a respetiva resolução de modo autónomo. Como já foi referido, o exercício 1 permite treinar de forma reversa à habitual os limites de funções racionais. Aqui o limite (no infinito) é conhecido e o aluno deverá inferir, com base na informação disponível, qual a função polinomial do denominador.
O exercício 2 consiste na aplicação de um novo teorema apresentado no enunciado e que é uma extensão natural do que já fora tratado a propósito das sucessões. O Professor assinalará esta semelhança à turma antes de pedir à turma que inicie a resolução autónoma dos dois exercícios.

Desenvolvimento da Aula

Como habitualmente, deambularei pela aula, respondendo às questões colocadas pelos grupos de trabalho durante as resoluções e, procurando, sempre que possível, detetar situações de bloqueio nos casos em que os alunos não tenham a iniciativa de me consultar (como infelizmente muitas vezes sucede, especialmente com alunos mais discretos ou tímidos).

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão do exercício 1***

É de esperar que este exercício surpreenda alguns alunos, já que se exige um raciocínio inverso daquele a que habitualmente são solicitados. A existência de limite finito da função racional impõe que ambas as funções polinomiais constituintes da razão tenham o mesmo grau. É previsível que a discussão e maioria das dúvidas colocadas se concentre na clarificação deste resultado, essencial para a resolução. Os alunos menos competentes na mobilização de conhecimentos de anos anteriores poderão, adicionalmente, revelar limitações na manipulação da função quadrática de coeficientes desconhecidos ou na resolução de sistemas de equações. Procurarei que os colegas mais avançados ajudem a superar estas dificuldades.

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão do exercício 2***

Qualquer das alíneas deste exercício não introduz, sob o ponto de vista operatório, novos desafios à turma. O cálculo de qualquer dos limites deve assim ser efetuado por aplicação direta do teorema acabado de apresentar e enunciar.
A estratégia de resolução passará assim por manipular as expressões de modo a que surjam produtos de uma função limitada (no caso serão as funções trigonométricas) por outra que tenda para zero. Após este rearranjo, a solução deverá ser trivial aplicando as regras já bem conhecidas (e treinadas) da álgebra de limites de funções. O desafio reside pois em conduzir os alunos na resolução de forma a que identifiquem os produtos de funções que permitam aplicar o novo teorema.

- ***Resolução autónoma das alíneas do exercício 3***

A inserção deste exercício na ficha de trabalho tem dois objetivos principais: responder às queixas recorrentes dos alunos (não apenas dos atuais) sobre a utilidade prática dos limites e perceber até que ponto o conceito de limite foi bem apreendido ou se o aluno, mesmo o mais habilitado, se confina a um bom domínio da respetiva operatória e aplicação direta de resultados preestabelecidos.
Não sei se haverá ou não tempo para completar em aula este exercício. Pode mesmo suceder que nem seja possível iniciá-lo, caso a estimativa de duração dos dois exercícios anteriores seja muito ultrapassada. Uma vez que é necessário reservar cerca de 20 minutos, no final da aula, para o miniteste de avaliação, não é de excluir que tal venha a suceder.
A turma será convidada a resolver o exercício seguindo sequencialmente as diversas alíneas, sendo advertida da importância de ler com atenção e perceber bem o texto introdutório de cada uma. A alínea que prevejo poder consumir mais tempo e gerar dificuldades em termos de justificação de respostas é a alínea b), pelo que estarei particularmente atento ao trabalho desenvolvido pelos grupos na respetiva resolução. Também é importante garantir que todos os grupos entendem a definição por recorrência da sucessão. Isso será imediatamente patente logo na alínea a).

Desenvolvimento da Aula

- ***Apresentação de resoluções, discussão e conclusão (exercícios 3)***

Para ganhar tempo, prevejo pedir a dois alunos (de grupos distintos) para apresentarem as respetivas resoluções no quadro. Isso permitirá discutir de forma sequencial as alíneas a) e b), acontecendo o mesmo, mais tarde, com as alíneas c) e d). Tentarei consumir o mínimo tempo possível com a primeira alínea e reservar assim maior atenção e foco para a alínea b), já que desta resultarão conclusões que facilitarão o entendimento das alíneas seguintes. Dessa forma, quer a alínea c) quer a alínea d), deverão suscitar menos questões aos alunos aquando da apresentação da respetiva resolução.
Com referido acima, um dos objetivos deste exercício é suscitar, no final, perante a resolução no quadro de aula, alguma reflexão conjunta sobre a utilidade e potencial do conceito de limite na solução de problemas em outras áreas da matemática e até no mundo real. Caso isso não seja possível nesta aula, tenciono voltar ao assunto, em jeito de conclusão, no início da aula seguinte.

- ***Miniteste de avaliação sumativa***

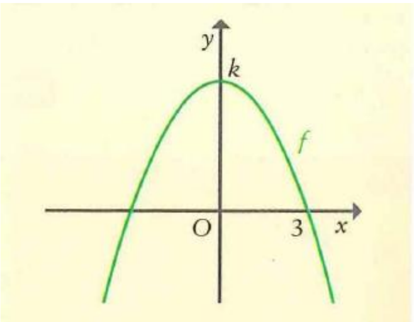
A turma foi previamente informada de que esta aula terminaria com um pequeno teste de avaliação sumativa, como aliás sucede com regularidade quando se conclui um conteúdo, a fim de apreciar as aprendizagens alcançadas em cada fase e poder definir e implementar estratégias corretivas, se necessário. O teste é realizado pelos mesmos grupos de trabalho que resolveram as fichas sobre o tema limites de funções reais de variável real.

O enunciado é distribuído aos grupos de trabalho e a turma é informada de que dispõe de 20 minutos para o resolver. O Professor dá apenas o apoio básico habitual nos testes sumativos individuais e pede para os grupos não interagirem, ao contrário do que sucede com frequência na resolução dos exercícios em aula.

Anexo 6.1: Exercício de aplicação/consolidação sobre limites de funções

Exercício 6.1: Exercício de aplicação/consolidação sobre limites de funções (enunciado)

1.
Seja $\boldsymbol{g}$ a função definida por $\boldsymbol{g(x) = x^2}$ e seja $\boldsymbol{f}$ uma outra função quadrática, representada graficamente, e tal que $f(-3) = f(3) = 0$ e $\boldsymbol{f(0) = k}$.



Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.39

Exercício 6.1: Exercício de aplicação/consolidação sobre limites de funções (enunciado)
Determina o valor de $\boldsymbol{k}$, sabendo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -2$

Exercício 6.1: Exercício de aplicação/consolidação sobre limites de funções (resolução)

O principal objetivo deste exercício é que os alunos apliquem os conhecimentos que adquiriram sobre limites de funções racionais (ou do quociente de sucessões polinomiais). O desconhecimento da função $f(x)$ introduz maior complexidade e uma perspetiva diferente de abordagem relativamente à que foi adotada na maioria das tarefas desenvolvidas nas aulas anteriores.

Utilizando apenas os dados do enunciado pode concluir-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{f(x)} = -2$$

Como $f(x)$ é uma função quadrática, terá a forma geral bem conhecida dos alunos $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Ora pelo teorema do limite de funções racionais conclui-se que $a = -\frac{1}{2}$. De facto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -2$$

Sabe-se pois que $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$. De $\boldsymbol{f(0) = k}$, também se conclui que $k = c$, pelo que nos basta determinar o valor de $\boldsymbol{c}$ para resolver a questão.

A determinação de $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ é simples se repararmos que $f(-3) = 0$ e $f(3) = 0$ conduzem a um sistema de duas equações a duas incógnitas. Efetivamente,

$$\begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}(-3)^2 + (-3)b + c = 0 \\ -\frac{1}{2}3^2 + 3b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3b + c = \frac{9}{2} \\ 3b + c = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Podemos portanto concluir que $k = \frac{9}{2}$.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Perante a multiplicidade de informação não conseguir saber por onde começar a resolução	Solicitar a leitura atenta do enunciado e separação entre os dados conhecidos e o que se pretende alcançar. Uma das dificuldades poderá ser não saber em rigor o que é uma função quadrática e sua forma geral de representação

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Como utilizar a informação $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -2$?	Começar por pedir ao aluno que substitua a expressão de $g(x)$, já que é conhecida. Depois solicitar à turma para, aplicando o teorema de limites de funções racionais (quando $x \to \pm\infty$), refletir acerca das características da função $f(x)$ que permitem obter a igualdade apresentada
Mesmo depois de determinado o coeficiente de x^2 na função f, não conseguir prosseguir o raciocínio na descoberta de $\boldsymbol{k}$	Tentar obter a participação de alunos da turma para prosseguir. Que informação adicional nos fornece o enunciado? Escrever as expressões de $f(3)$ e $f(-3)$. Como determinar $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$?
Alguns alunos podem seguir uma abordagem de determinação de $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, só depois determinando o valor de $\boldsymbol{a}$	É uma abordagem possível embora mais demorada e complexa, podendo dar origem a erros nas operações algébricas com diversos parâmetros envolvidos ($\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ ficarão expressos em função de $\boldsymbol{a}$). No final será fácil reconhecer que começar por determinar $\boldsymbol{a}$ seria o melhor caminho
Qual a expressão final de $f(x)$? É importante que os alunos confirmem se a função a que chegaram cumpre efetivamente as condições apresentadas no enunciado como pressupostos	É possível que alguns alunos não consigam apresentar/identificar a expressão da função $f(x)$. Conforme o processo de resolução do exercício que tenham adotado, solicitar que identifiquem $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e, finalmente, construam a expressão de $f(x)$

Anexo 6.2: Produto de uma função limitada por outra de limite nulo

Exercício 6.2: Produto de uma função limitada por outra de limite nulo (enunciado)
2. **Teorema (produto de uma função limitada por outra com limite nulo)**: Dadas funções reais de variável real, f e g, e sendo $\boldsymbol{a}$ um ponto aderente a $\boldsymbol{D_{f \times g}}$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) se $D_{f \times g}$ não for majorado (respetivamente, minorado), se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e se g é uma função limitada, então $\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = 0$ (ver página 44, volume 3 do teu manual)

Exercício 6.2: Produto de uma função limitada por outra de limite nulo (enunciado)
Calcula os seguintes limites: Extraído de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.45 **a)** $$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\cos(\frac{1}{x})}{2x}$$ **b)** $$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+3\cos x}{3x^2+2\sin x}$$

Exercício 6.2.a): Produto de uma função limitada por outra de limite nulo (resolução)
Como a função cosseno é limitada (os seus valores variam entre -1 e 1) e a função x^2 tende para zero quando $x\to 0$, a aplicação da álgebra dos limites à expressão conduz a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos pois tentar levantar a indeterminação, usando as técnicas aplicadas em exercícios anteriores: $$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\cos(\frac{1}{x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x[1+x\cos(\frac{1}{x})]}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\cos(\frac{1}{x})}{2}$$ A indeterminação foi efetivamente levantada. Aplicando de novo a álgebra dos limites, temos de conseguir determinar $\lim_{x\to 0}\left(x\cos(\frac{1}{x})\right)$. Ora, invocando de novo o teorema que acabámos de enunciar, concluímos que este limite é zero, pois trata-se do produto de uma função limitada ($\cos(\frac{1}{x})$) por uma função que tende para zero (a função x), quando a variável independente, x, tende para zero. Simbolicamente, $$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\cos(\frac{1}{x})}{2}=\frac{1+\lim_{x\to 0}[x\cos(\frac{1}{x})]}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não entender que a função $\cos(\frac{1}{x})$ é limitada	Penso que será fácil algum aluno da turma esclarecer esta dúvida. A função $\boldsymbol{\cos x}$ tem domínio $\mathbb{R}$ e é limitada, porque os seus valores variam entre menos um e um. O facto de alterarmos o argumento (isto é, a variável independente) não modifica o intervalo de valores devolvido pela função.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Tentar aplicar a álgebra de limites e separar a função cosseno de x^2(ou de x , após a remoção da indeterminação)	Este caminho não conduz a bom porto porque a função $\cos(\frac{1}{x})$ (tal como a função $\sin(\frac{1}{x})$) não tem limite quando x tende para zero (embora zero seja ponto aderente ao seu domínio). Tentar que os alunos entendam que a função não para de oscilar entre menos um e um quando se aproxima de zero (e portanto $\frac{1}{x}$ toma valores cada vez maiores em módulo). Portanto o limite não existe. O teorema permite-nos no entanto ultrapassar esta dificuldade.
Dificuldades na estratégia para levantar a indeterminação	Após os exercícios das fichas anteriores, é previsível que pelo menos alguns alunos da turma consigam dar sugestões que permitam avançar na resolução do problema

Exercício 6.2.b): Produto de uma função limitada por outra de limite nulo (resolução)

Neste caso estamos perante uma indeterminação do tipo$\frac{\infty}{\infty}$. É previsível que a turma não ache isso evidente, uma vez que esta conclusão não resulta da simples aplicação da álgebra dos limites (porque quer seno quer cosseno não têm limite quando x tende para infinito). Mas basta por exemplo constatar que, sendo $2x^2 + 3\cos x \geq 2x^2 - 3$ e $\lim_{x\to-\infty}(2x^2 - 3) = +\infty$, então também $\lim_{x\to-\infty}(2x^2 + 3\cos x) = +\infty$. Trata-se do mesmo cenário da soma de uma sucessão convergente para $\pm\infty$ com uma sucessão limitada.

Vamos começar por levantar a indeterminação, aplicando de seguida o teorema acima enunciado.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2 + 3\cos x}{3x^2 + 2\sin x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2(1 + \frac{3}{2x^2}\cos x)}{3x^2(1 + \frac{2}{3x^2}\sin x)} = \frac{2}{3}.\frac{1 + \lim_{x\to-\infty}(\frac{3}{2x^2}\cos x)}{1 + \lim_{x\to-\infty}(\frac{2}{3x^2}\sin x)} = \frac{2}{3}$$

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não identificar a indeterminação tipo $\frac{\infty}{\infty}$	Não é importante para a resolução a identificação da indeterminação. O aluno pode lançar-se imediatamente na solução através da aplicação do teorema enunciado. No entanto é importante lembrar o resultado aprendido nas sucessões que permite perceber agora que quer numerador quer denominador tendem para $-\infty$
Não conseguir transformar a expressão numa forma que permita aplicar o teorema apresentado no enunciado do exercício	Pedir sugestões à turma. Olhando para a expressão e sabendo que as funções seno e cosseno são limitadas, como encontrar funções tendentes para zero que multipliquem aquelas funções trigonométricas? Se necessário, avançar com mais uma dica: a metodologia recomendada não difere muito da utilizada em expressões semelhantes com funções racionais
Não apresentar todos os cálculos/passagens de forma clara, por dificuldade em aplicar a álgebra dos limites	Lembrar a forma como se resolveram exercícios anteriores e a necessidade de justificar claramente os diversos passos da resolução

Anexo 6.3: O conceito de limite e a dízima 0,999(9)

Exercício 6.3.a): Sucessão tendente para 0,999(9) (enunciado)
3. Qualquer número racional pode ser representado por uma fração. Eis alguns exemplos, considerando apenas frações irredutíveis: • Números inteiros, positivos ou negativos (por exemplo, $\frac{2}{1}$; $-\frac{3}{1}$; $\frac{7}{1}$ e $-\frac{10}{1}$) • Dízimas finitas (exemplos: $\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{5}{4}=1{,}25$; $-\frac{7}{8}=-0{,}875$) • Dízimas infinitas periódicas [exemplos simples bem conhecidos: $\frac{1}{3}=0,(3)$; $-\frac{2}{3}=0,(6)$. Mas também outros mais complexos, por exemplo $\frac{3254}{999}=3,(257)$] • Também existem frações que têm uma parte inteira e outra fracionária (por exemplo $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}=1,(3)$ ou $-\frac{7}{4}=-1-\frac{3}{4}=-1{,}75$) **a)** Considera a sucessão (u_n) definida por recorrência da seguinte forma:

Exercício 6.3.a): Sucessão tendente para 0,999(9) (enunciado)
$$u_n = \begin{cases} 0{,}9; & n = 1 \\ u_{n-1} + 9.10^{-n}; & n > 1 \end{cases}$$ Calcula os termos (apresenta os valores sob a forma de dízima sem potências de base 10) $$\boldsymbol{u_2} = \quad ; \boldsymbol{u_3} = \quad ; \boldsymbol{u_4} = \quad ; \boldsymbol{u_5} = \quad ; \boldsymbol{u_6} =$$ Já deverás conseguir indicar, sem calcular diretamente, qual o valor do termo de índice 10 (de novo, resolve a potência de base 10 que consta da definição por recorrência): $$\boldsymbol{u_{10}} =$$

Exercício 6.3.a): Sucessão tendente para 0,999(9) (resolução)
Pela introdução do exercício os alunos poderão inferir, como se pretende, que 0,999(9), sendo uma dízima infinita periódica, também terá uma representação racional (quer dizer, através de um número inteiro ou de uma fração). Qual será essa representação alternativa à apresentada? No entanto, por agora apenas se pretende que os alunos analisem e estudem a sucessão apresentada. A partir da expressão recorrente é imediato concluir que $$\boldsymbol{u_2} = 0{,}99 \quad ; \boldsymbol{u_3} = 0{,}999 \quad ; \boldsymbol{u_4} = 0{,}9999 \quad ; \boldsymbol{u_5} = 0{,}99999 \quad ; \boldsymbol{u_6} = 0{,}999999$$ e, por observação dos resultados acima, $$\boldsymbol{u_{10}} = 0{,}9999999999$$ <u>Conclusão</u>: o termo $\boldsymbol{u_n}$ pode ser construído seguindo '0,' de $\boldsymbol{n}$ algarismos '9'.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Dificuldade em interpretar a definição por recorrência da sucessão	Não deverá ser difícil conseguir que colegas na turma permitam ultrapassar estas dificuldades. A presença de expoentes negativos e o próprio conceito (ou raciocínio) de recorrência atrapalha alguns alunos

Exercício 6.3.b): Estudo da sucessão $\boldsymbol{u_n}$ (enunciado)
3. **b)** Classifica cada afirmação abaixo com **V** ou **F**, conforme a consideres verdadeira ou falsa, respetivamente. Tenta justificar a tua decisão.

Exercício 6.3.b): Estudo da sucessão u_n (enunciado)	
(3b.1) – A sucessão (u_n) é limitada e monótona	☐
(3b.2) – A sucessão (u_n) tem mínimo igual a **0,9** e máximo igual a **1**	☐
(3b.3) – A sucessão (u_n) tende para $+\infty$	☐
(3b.4) – Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $u_n < 1$	☐
(3b.5) – A sucessão (u_n) converge para **1**	☐
(3b.6) – A sucessão (u_n) converge para **0,999(9)**	☐

Exercício 6.3.b): Estudo da sucessão u_u (resolução)

(3b.1) – A sucessão (u_n) é limitada e monótona	V
(3b.2) – A sucessão (u_n) tem mínimo igual a **0,9** e máximo igual a **1**	F
(3b.3) – A sucessão (u_n) tende para $+\infty$	F
(3b.4) – Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $u_n < 1$	V
(3b.5) – A sucessão (u_n) converge para **1**	V
(3b.6) – A sucessão (u_n) converge para **0,999(9)**	V

Todas as questões exceto a (3b.2) e a (3b.3) são verdadeiras.

<u>A sucessão é monótona crescente</u>, pois $u_2 > u_1$ e $u_n - u_{n-1} = 9.10^{-n} > 0$, para $n \geq 1$. Também é limitada. Pela análise cuidada da expressão que define a sucessão por recorrência, conclui-se intuitivamente que todos os termos da sucessão são inferiores a um. Mas é possível também demonstrá-lo lançando mão de conhecimentos já apreendidos sobre sucessões.

A simples observação dos sucessivos termos da sucessão (na alínea anterior), permite concluir que uma expressão geral para u_n pode ser $u_n = 9\sum_{m=1}^{n} 10^{-m}$. Ora esta igualdade é o produto de nove pela progressão geométrica $v_n = \sum_{m=1}^{n} 10^{-m}$ de primeiro termo e razão iguais a $\frac{1}{10} = 0{,}1$. Sabemos que a soma dos primeiros n termos consecutivos da progressão v_n é dada por $10^{-1}.\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}}$. Podemos pois concluir que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0{,}9\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 0{,}9\frac{1-10^{-n}}{0{,}9} = 1 - 10^{-n} < 1$. <u>A sucessão u_n é pois limitada</u>.

Sendo monótona crescente a sucessão tem como mínimo o seu primeiro termo. Portanto 0,9 é o mínimo da sucessão. A sucessão não tem máximo, porque não existe qualquer termo que seja maior que todos os outros. O número um não é máximo porque já vimos não ser termo da sucessão.

Exercício 6.3.b): Estudo da sucessão $\boldsymbol{u_u}$ (resolução)
A sucessão u_n não pode tender para infinito porque nenhum dos seus termos excede o número um. A sucessão $\boldsymbol{u_n}$ tem de ser convergente, uma vez que é crescente e limitada. Usando a definição de limite de uma sucessão, prova-se facilmente (tal como foi feito nas aulas sobre sucessões) que os termos da sucessão se aproximam de um tanto quanto queiramos, ou seja, $(\boldsymbol{u_n}) \to \mathbf{1}$. Qual o significado da notação 0,999(9)? Trata-se de uma forma de representar uma dízima infinita periódica. Neste caso o número é constituído por zero vírgula seguido de uma infinidade de noves. Analisando a definição de $\boldsymbol{u_n}$ concluímos que, apesar de nenhum termo da sucessão igualar a dízima, a sucessão aproxima-se dela tanto quanto queiramos. Desta forma, <u>é correto afirmar que a sucessão u_n tende para 0,999(9)</u>.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Respostas intuitivas, dificuldade em apresentar os resultados em linguagem e notação matemática	É previsível que pelos menos alguns alunos respondam acertadamente nas quatro primeiras proposições, tendo no entanto dificuldade em sustentar a sua decisão em conceitos matemáticos já apreendidos em aulas anteriores. Tentar, com perguntas adequadas e reporte a conclusões de aulas recentes, levar os alunos a justificar adequadamente as suas escolhas.
Dificuldades ou indecisão quanto às proposições (3b.5) e (3b.6)	Ambas as proposições resultam diretamente da aplicação da definição de limite de uma sucessão. No entanto muitos alunos continuam a não conseguir utilizar adequadamente a definição para verificar a existência de limite, preferindo os exercícios que permitem conclusões com recurso a limites já conhecidos e à Álgebra de Limites. No entanto, às vezes, a definição é o único recurso, como neste caso
Muitos alunos continuarão reticentes em admitir que a sucessão tenda para um	O algoritmo de obtenção dos termos da sucessão aponta para o limite 0,999(9) de forma intuitiva. Mais difícil é admitir que não limitar o número de noves equivale a dizer que a dízima infinita não se distingue do número um. A aplicação direta da definição de limite à sucessão permitirá no entanto concluir que um é efetivamente o seu limite.

Exercício 6.3.c): Será que 0,999(9) = 1? (enunciado)

3.

c)

Com base nas respostas à alínea anterior e no facto conhecido de o limite de uma sucessão, se existir, ser único, vamos tentar tirar algumas conclusões sobre o comportamento e características da sucessão (u_n).

Antes recorda que sendo **"0,999(9)"** um número representado por uma dízima infinita periódica (o algarismo '9' repete-se indefinidamente), deverá ser possível representá-lo por uma fração (ou por um número inteiro, como caso particular de uma fração).

À semelhança da alínea anterior, classifica cada afirmação abaixo com **V** ou **F**, conforme a consideres verdadeira ou falsa, respetivamente.

(3c.1) – O número **"0,999(9)"** é inferior à unidade .... ☐

(3c.2) – A igualdade **"0,999(9) = 1"** é verdadeira, isto é, qualquer das representações numéricas, **'0,999(9)'** ou **'1'**, pode ser usada para designar uma unidade .... ☐

(3c.3) – A inequação **"1-0,999(9) > 0"** é verdadeira .... ☐

Exercício 6.3.c): Será que 0,999(9) = 1? (resolução)

(3c.1) – O número **"0,999(9)"** é inferior à unidade .... F

(3c.2) – A igualdade **"0,999(9) = 1"** é verdadeira, isto é, qualquer das representações numéricas, **'0,999(9)'** ou **'1'**, pode ser usada para designar uma unidade V

(3c.3) – A inequação **"1-0,999(9) > 0"** é verdadeira .... F

Apenas a proposição (3c.2) é verdadeira.

Uma vez que o limite de uma sucessão convergente, se existir, é único, teremos forçosamente de concluir, com base nas conclusões da alínea anterior, que a dízima infinita periódica 0,999(9) não se distingue do número um, ou seja, é exatamente igual a 1. Dessa forma as afirmações (3c.1) e (3c.3) só podem ser falsas. De facto, 0,999(9) e 1 são indistinguíveis, não existindo qualquer número real entre ambos.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Insistir em que 0,(9) é diferente de 1	A incredulidade de alguns (ou mesmo de todos) alunos é natural e foi a principal motivação de propor o exercício 3. O aluno deverá ser confrontado com algumas contradições a que conduz a aceitação de que são números distintos, nomeadamente a questão, já demonstrada em aula anterior, de que o limite de uma sucessão convergente tem de ser único.
Afirmar que as alíneas (3c.2) e (3c.3) são ambas verdadeiras	Se se aceitar que 0,(9) é igual a 1, então a alínea (3c.3) tem de ser falsa, pois é equivalente a $1 > 0{,}999(9)$, o que contradiz (3c.2)

Exercício 6.3.d): Outra forma de concluir que 0,999(9) = 1? (enunciado)
3. **d)** É relativamente fácil mostrar que $0{,}333(3) = \frac{1}{3}$. Um método possível e muito simples, consiste em substituir 0,333(3) no primeiro membro da igualdade (isto é, substitui $\boldsymbol{x}$ por 0,333(3) <u>apenas no primeiro membro</u> da equação), $10x - x = 9x \qquad \text{(I)}$ mantendo inalterado o segundo membro. Simplifica então o primeiro membro da equação e em seguida resolve a equação em ordem $\boldsymbol{x}$: $10.[0{,}333(3)] - 0{,}333(3) = 9x \Leftrightarrow \_\_\_\_\_ = 9x \Leftrightarrow x =$ Repara que começaste por assumir que $\boldsymbol{x}$ é igual a “0,333(3)” e concluíste, sem alterar a equação inicial (I) que sabes ser verdadeira, que $\boldsymbol{x}$ é também igual a $\frac{1}{3}$. Portanto a conclusão é que $0{,}333(3) = \frac{1}{3}$, ou seja, <u>são duas formas diferentes de representar o mesmo valor numérico</u>. De igual modo se concluiria que $0{,}666(6) = \frac{2}{3}$. Aplica o raciocínio acima para concluir que $0{,}999(9) = 1$.

Exercício 6.3.d): Outra forma de concluir que 0,999(9) = 1? (resolução)
Este exercício não trata propriamente de uma demonstração, mas de ilustrar com um exemplo simples que a igualdade 0,999(9)=1 é perfeitamente compatível com as operações algébricas básicas. De facto, para o caso 0,333(3) tem-se, efetuando a substituição no primeiro membro, $10.[0{,}333(3)] - 0{,}333(3) = 9x \Leftrightarrow \_\_3\_\_ = 9x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Exercício 6.3.d): Outra forma de concluir que 0,999(9) = 1? (resolução)
Procedendo de forma análoga para a dízima 0,999(9): $$10.[0{,}999(9)] - 0{,}999(9) = 9x \Leftrightarrow 9 = 9x \Leftrightarrow x = 1$$ Portanto, também do ponto de vista algébrico, 0,999(9) = 1.

Dificuldades do aluno	**Estratégias do professor**
Não perceber o enunciado do exercício ou o seu objetivo	Este exercício pode não constituir uma surpresa para alguns alunos da turma, uma vez que a questão da conversão em fração de dízimas infinitas periódicas é tratada no programa do 8.º ano. Aliás, um dos descritores afirma expressamente que "…o algoritmo da divisão nunca conduz a dízimas infinitas periódicas de período igual a «9»" [ME, 2013b, p.60], o que permite concluir que 0,(9)=1.
Que relação tem esta alínea com o conceito de limite?	Mostrar aos alunos que a matemática é um todo coerente, em que os diferentes domínios e temáticas se relacionam de forma harmoniosa. Neste caso, conseguimos concluir que 0,(9)=1 recorrendo à teoria dos limites. No 8.º ano tínhamos concluído o mesmo estudando a relação entre números racionais e dízimas no domínio 'Números e Operações'.

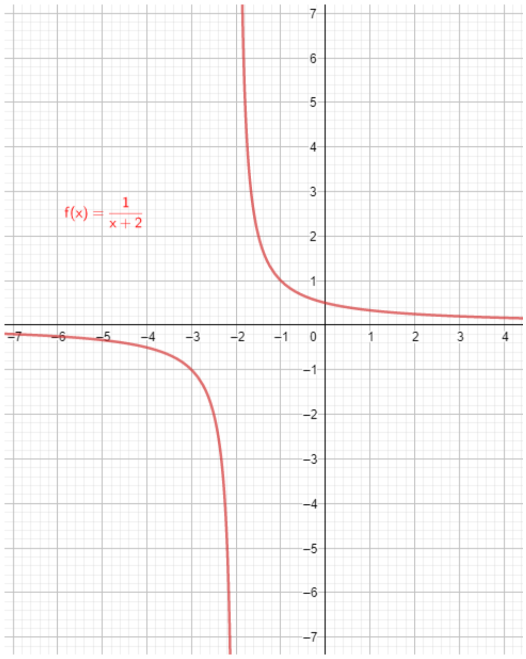
Anexo 6.4: Miniteste de avaliação

Miniteste: Questão 1 (enunciado)

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.18

Seja $\boldsymbol{f}$ a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+2}}$ e representada graficamente.

Mostrem que não existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$



Miniteste: Questão 1 (resolução)

Por observação do gráfico, constata-se que os limites laterais no ponto de abcissa -2 são diferentes. Analiticamente, para o limite à esquerda:

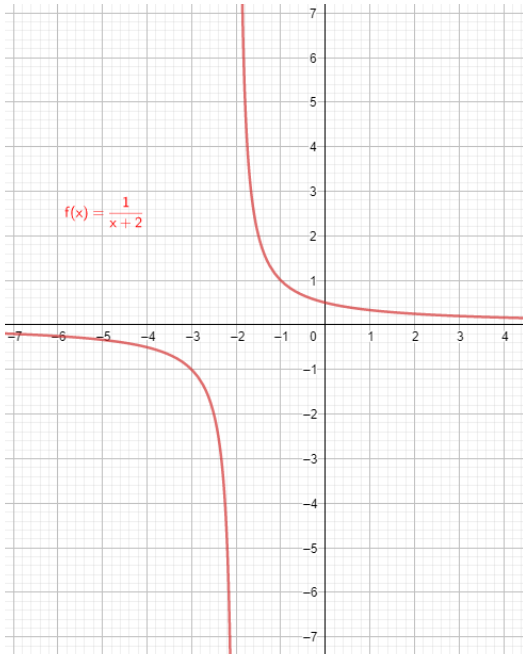
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2^- + 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Por sua vez, o limite à direita conduz a $+\infty$:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2^+ + 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Uma vez que os limites laterais no ponto -2 são distintos, não existe limite da função no ponto de abcissa -2.

Outra possível abordagem seria recorrer à definição de limite segundo Heine e escolher uma sucessão de objetos adequada, por exemplo $\boldsymbol{u_n} = \frac{(-1)^n}{n} - \mathbf{2}$.



Miniteste: Questão 2 (enunciado)

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.48

Na figura está representado o gráfico de uma função $\boldsymbol{g}$, de domínio $\mathbb{R}$.

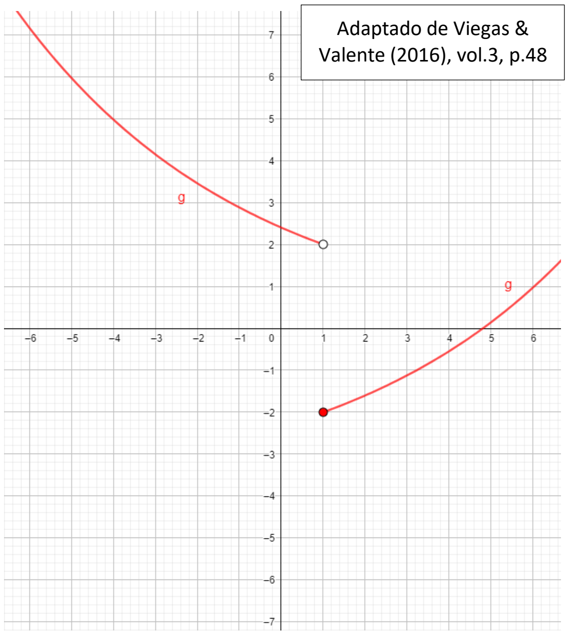
Seja $(\boldsymbol{u_n})$ a sucessão definida por $\boldsymbol{u_n = \frac{n-5}{n}}$

Qual o valor de $\mathbf{lim}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_n}))$?

(A) $\mathbf{-2}$ (B) $+\infty$

(C) $\mathbf{2}$ (D) $\mathbf{1}$

Justifiquem a vossa resposta.

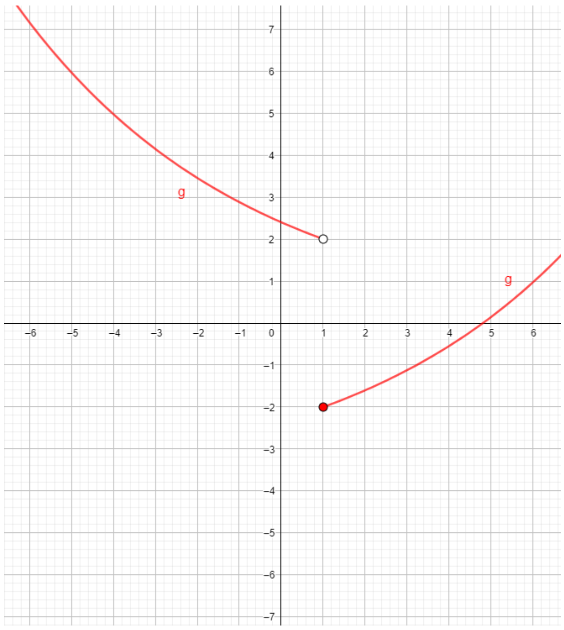


Miniteste: Questão 2 (resolução)

A sucessão de objetos $(\boldsymbol{u_n})$ tende para um por valores inferiores a um. De facto, $\frac{n-1}{n} < 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Desta forma, a sucessão de imagens $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_n}))$ estará localizada no troço esquerdo do gráfico representado na figura e aproximar-se-á da ordenada desse troço correspondente à abcissa 1. Por observação do gráfico, uma vez que não conhecemos a expressão analítica de $g(x)$, concluímos que $\mathbf{lim}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_n})) = \mathbf{2}$.

Portanto a resposta correta é a (C).



Miniteste: Questão 3 (enunciado)

Adaptado de Viegas & Valente (2016), vol.3, p.48

Para um certo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$, seja $\boldsymbol{h}$ a função definida por

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x} + \mathbf{8}}, & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{2} \\ \mathbf{1}, & \boldsymbol{x} = \mathbf{2} \end{cases}$$

Miniteste: Questão 3 (enunciado)

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to 2} \boldsymbol{h(x)}$.

Indiquem, justificando, qual o valor de $\boldsymbol{k}$?

(A) **0** (B) **−4** (C) **4** (D) **2**

Miniteste: Questão 3 (resolução)

Segundo Heine, a existência de $\lim\limits_{x \to 2} \boldsymbol{h(x)}$ obriga a que a qualquer sucessão de objetos, $\boldsymbol{x_n}$,tendente para 2 corresponda uma sucessão de imagens, $\boldsymbol{h(x_n)}$, convergente para o valor $\lim\limits_{x \to 2} \boldsymbol{h(x)}$ (recordar que o limite, quando existe, é único).

Observando a expressão definidora da função $h(x)$, conclui-se imediatamente que $\lim\limits_{x \to 2} \boldsymbol{h(x)}$ só pode ser igual a um, uma vez que se escolhermos a sucessão constante $x_n = 2$, a sucessão das imagens $h(x_n)$ é também constante e igual a um.

Escolhamos então <u>qualquer</u> sucessão de objetos, digamos $\boldsymbol{u_n}$,que tenda para 2 e que não seja a sucessão constante (nem exista uma sua subsucessão que o seja). Essa sucessão terá um número infinito de termos distintos de 2, termos esses cujas imagens, pela função $h(x)$, serão obtidas através da expressão $\frac{3x-k}{x+8}$. Já concluímos que esta sucessão de imagens, qualquer que ela seja, terá de convergir para um. Ou seja,

$$\lim h(u_n) = \lim \frac{3u_n - k}{u_n + 8} = \frac{3 \lim u_n - k}{\lim u_n + 8} = \frac{3.2 - k}{2 + 8} = \frac{6 - k}{10} = 1$$

Na expressão acima usou-se o facto de se ter concluído que $\lim\limits_{x \to 2} \boldsymbol{h(x)} = \boldsymbol{1}$, a suposição de que os termos de u_n eram distintos de 2 (o caso da sucessão constante 2 já tinha sido considerado e a sucessão de imagens também tendia para 1) e a nossa hipótese de que u_n tende para 2. Depois usamos a já conhecida álgebra de limites de sucessões para calcular o limite de $h(u_n)$.

O valor de k sai então imediatamente de $\frac{6-k}{10} = 1$, obtendo-se $\boldsymbol{k = -4}$, isto é, a resposta correta é a (B).

Acabámos de mostrar algo que já sabíamos e que também poderíamos ter usado na resolução deste exercício: o limite de uma função num ponto do seu domínio, se existir, terá de ser igual ao valor da função nesse ponto. Ou seja, no caso deste exercício teria de se observar, face à afirmação da existência de limite da função no ponto de abcissa 2, $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = h(2) = 1$. O resto do raciocínio que conduziu à conclusão $k = -4$ é o já apresentado acima e resulta diretamente da definição de limite de uma função segundo Heine.

Uma vez que a definição de Heine obriga a que todas as sucessões tenham o mesmo comportamento, o aluno poderia simplesmente ter invocado uma qualquer sucessão tendente para 2 com todos termos diferentes de 2 para resolver este exercício. A sucessão

Miniteste: Questão 3 (resolução)
de objetos $v_n = \frac{2n+a}{n}$, por exemplo, conduziria imediatamente à obrigatoriedade de $k = -4$.

Anexo 6.5: Ficha de Trabalho nº 6

ESPAN - 11º ano | **Ficha de Trabalho nº 6** | março 2019

Escola Secundária Padre Alberto Neto

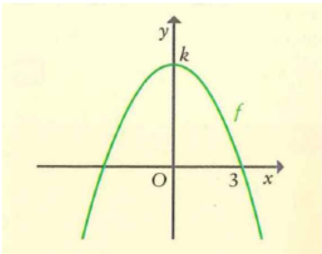
Matemática A - 11º Ano - Turma 11º E - Ano Letivo 2018/2019

Limites de Funções Reais de Variável Real

Grupo de Trabalho: ______________________ / ______________________ / ______________

1.

Seja $\boldsymbol{g}$ a função definida por $\boldsymbol{g(x) = x^2}$ e seja $\boldsymbol{f}$ uma outra função quadrática, representada graficamente, e tal que $f(-3) = f(3) = 0$ e $\boldsymbol{f(0) = k}$.



Determina o valor de $\boldsymbol{k}$, sabendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -2$.

2.

Teorema (produto de uma função limitada por outra com limite nulo):

Dadas funções reais de variável real, $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$, e sendo $\boldsymbol{a}$ um ponto aderente a $\boldsymbol{D_{f\times g}}$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) se $D_{f\times g}$ não for majorado (respetivamente, minorado), se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e se g é uma função limitada, então $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}(f \times g)(x) = 0}$

(ver página 44, volume 3 do teu manual)

Calcula os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2 + 3\cos x}{3x^2 + 2\sin x}$

Produzido por Fernando Mendes (Mestrado Ensino Matemática – IE-FCUL) | Pág. 1 de 3

ESPAN - 11º ano **Ficha de Trabalho nº 6** março 2019

3.
Qualquer número racional pode ser representado por uma fração. Eis alguns exemplos, considerando apenas frações irredutíveis:

- Números inteiros, positivos ou negativos (por exemplo, $\frac{2}{1}$; $-\frac{3}{1}$; $\frac{7}{1}$ e $-\frac{10}{1}$)
- Dízimas finitas (exemplos: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{5}{4} = 1{,}25$; $-\frac{7}{8} = -0{,}875$)
- Dízimas infinitas periódicas [exemplos simples bem conhecidos: $\frac{1}{3} = 0,(3)$; $-\frac{2}{3} = 0,(6)$. Mas também outros mais complexos, por exemplo $\frac{3254}{999} = 3,(257)$]
- Também existem frações que têm uma parte inteira e outra fracionária (por exemplo $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1,(3)$ ou $-\frac{7}{4} = -1 - \frac{3}{4} = -1{,}75$)

a)
Considera a sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ definida por recorrência da seguinte forma:

$$u_n = \begin{cases} 0{,}9; & n = 1 \\ u_{n-1} + 9.10^{-n}; & n > 1 \end{cases}$$

Calcula os termos (apresenta os valores sob a forma de dízima sem potências de base 10)

$\boldsymbol{u_2} =$; $\boldsymbol{u_3} =$; $\boldsymbol{u_4} =$; $\boldsymbol{u_5} =$; $\boldsymbol{u_6} =$

Já deverás conseguir indicar, sem calcular diretamente, qual o valor do termo de índice 10 (de novo, resolve a potência de base 10 que consta da definição por recorrência):

$\boldsymbol{u_{10}} =$

b)
Classifica cada afirmação abaixo com **V** ou **F**, conforme a consideres verdadeira ou falsa, respetivamente. Tenta justificar a tua decisão.

(3b.1) – A sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ é limitada e monótona -- ☐

(3b.2) – A sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ tem mínimo igual a **0,9** e máximo igual a **1** ---------------------- ☐

(3b.3) – A sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ tende para $+\infty$ -- ☐

(3b.4) – Qualquer que seja $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, tem-se $\boldsymbol{u_n} < \mathbf{1}$ -- ☐

(3b.5) – A sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ converge para **1** -- ☐

(3b.6) – A sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ converge para **0,999(9)** -- ☐

Produzido por Fernando Mendes (Mestrado Ensino Matemática – IE-FCUL) Pág. 2 de 3

c)
Com base nas respostas à alínea anterior e no facto conhecido de o limite de uma sucessão, se existir, ser único, vamos tentar tirar algumas conclusões sobre o comportamento e características da sucessão (u_n) .

Antes recorda que sendo **"0,999(9)"** um número representado por uma dízima infinita periódica (o algarismo '9' repete-se indefinidamente), deverá ser possível representá-lo por uma fração (ou por um número inteiro, como caso particular de uma fração).

À semelhança da alínea anterior, classifica cada afirmação abaixo com **V** ou **F**, conforme a consideres verdadeira ou falsa, respetivamente.

(3c.1) – O número **"0,999(9)"** é inferior à unidade -- ☐

(3c.2) – A igualdade **"0,999(9) = 1"** é verdadeira, isto é, qualquer das representações numéricas, **'0,999(9)'** ou **'1'**, pode ser usada para designar uma unidade ------------------------------- ☐

(3c.3) – A inequação **"1-0,999(9) > 0"** é verdadeira -- ☐

d)
É relativamente fácil mostrar que $0{,}333(3) = \frac{1}{3}$. Um método possível e muito simples, consiste em substituir 0,333(3) no primeiro membro da igualdade (isto é, substitui $\boldsymbol{x}$ por 0,333(3) apenas no primeiro membro da equação),

$$10x - x = 9x \qquad \text{(I)}$$

mantendo inalterado o segundo membro. Simplifica então o primeiro membro da equação e em seguida resolve a equação em ordem $\boldsymbol{x}$:

$$10.[0{,}333(3)] - 0{,}333(3) = 9x \Leftrightarrow \_\_\_\_\_ = 9x \Leftrightarrow x =$$

Repara que começaste por assumir que $\boldsymbol{x}$ é igual a "0,333(3)" e concluíste, sem alterar a equação inicial (I) que sabes ser verdadeira, que $\boldsymbol{x}$ é também igual a $\frac{1}{3}$. Portanto a conclusão é que $0{,}333(3) = \frac{1}{3}$, ou seja, são duas formas diferentes de representar o mesmo valor numérico. De igual modo se concluiria que $0{,}666(6) = \frac{2}{3}$.

Aplica o raciocínio acima para concluir que $0{,}999(9) = 1$.

Anexo 6.6: Miniteste de Avaliação (enunciado)

Escola Secundária Padre Alberto Neto

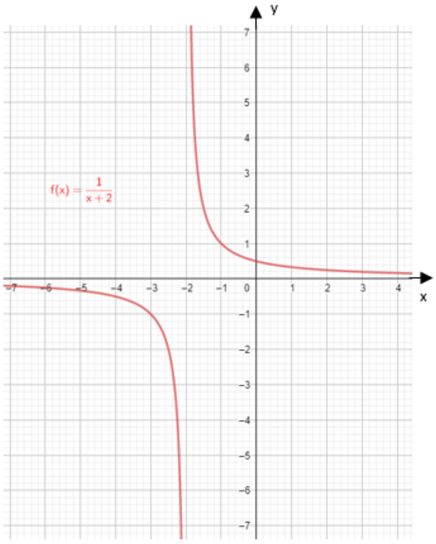
Matemática A - 11º Ano - Turma 11º E - Ano Letivo 2018/2019

Limites de Funções Reais de Variável Real

Nome: ______________________ / ______________________

1.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x+2}$ e representada graficamente.



Mostrem que não existe $\lim_{x \to -2} f(x)$

2.

Na figura está representado o gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$.

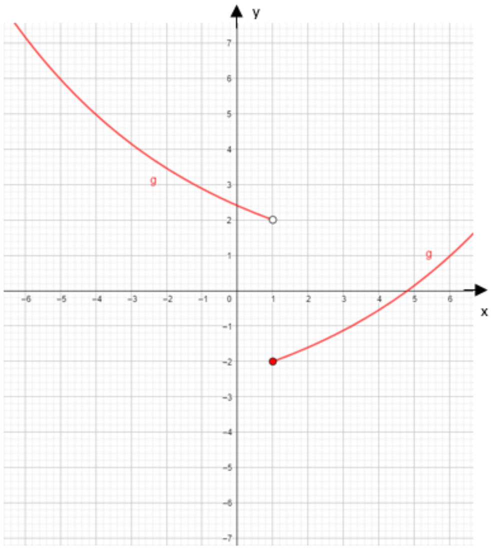
Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{n-5}{n}$

Qual o valor de $\lim(g(u_n))$?

(A) -2　(B) $+\infty$

(C) 2　(D) 1

Justifiquem a vossa resposta.



3.

Para um certo $k \in \mathbb{R}$, seja h a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-k}{x+8}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim_{x \to 2} h(x)$.

Indiquem, justificando, qual o valor de k ?

(A) 0　(B) -4　(C) 4　(D) 2

Anexo 7: Autorização Encarregados Educação

ULISBOA Instituto de Educação

Estudar o uso de tarefas desafiantes e de diferenciação pedagógica nas aulas de Matemática

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

A turma do seu educando foi selecionada para participar no *EDUCATE*, um projeto de investigação europeu do ERASMUS+ conduzido por uma equipa de investigadores de Portugal, Chipre, Grécia e Irlanda, que pretende estudar como o uso de tarefas matemáticas desafiantes no ensino da Matemática pode promover a aprendizagem de todos os alunos. Esta investigação é importante uma vez que, com base nos seus resultados, serão produzidos materiais para a formação de professores que podem ser usados por muitos professores e futuros professores em toda a União Europeia. *A participação do seu educando nesta investigação é voluntária e requer o seu consentimento.*

O que está envolvido na participação do meu educando nesta investigação?

O professor de Matemática do seu educando, Dr. Paulo Alvega, juntamente com os dois mestrandos do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa que estão a realizar a sua prática de ensino supervisionada no Colégio (Fernando Mendes e Francisco Aidos) irão gravar em vídeo algumas aulas nas próximas semanas. Embora o foco da observação recaia sobre os professores em formação, o seu educando poderá também ser, ocasionalmente, captado na gravação dessas aulas.

Como é que os dados pessoais do meu educando serão salvaguardados?

A identidade pessoal do seu educando permanecerá totalmente confidencial. Alguns pequenos excertos de vídeo das aulas serão visionados num contexto restrito com os professores em formação e os formadores, com a intenção de apoiar a reflexão dos formandos sobre a prática de ensino da Matemática.

1

A participação do meu educando nesta investigação é obrigatória?

A participação do seu educando nesta investigação é voluntária. ***Para indicar se dá o seu consentimento à participação do seu educando, por favor, preencha o formulário de resposta, em anexo, e devolva-o ao professor de Matemática.*** Note-se que os alunos que não desejem participar na investigação serão colocados fora do alcance da câmara quando as aulas de Matemática estiverem a ser gravadas.

Muito apreciaríamos a sua resposta positiva, uma vez que consideramos que este estudo pode contribuir para compreender como os professores podem ensinar Matemática de uma forma adequada a todos os alunos e promotora de uma aprendizagem de qualidade. Consequentemente, acreditamos que a concretização da investigação e as sugestões e os materiais curriculares daí decorrentes, poderão contribuir para a qualidade do ensino da Matemática no nosso país, assim como promover as aprendizagens de todos os alunos nesta disciplina. O seu educando também será informado e solicitado a aceitar em participar do estudo.

Como poderei saber mais acerca desta investigação?

Para mais informação sobre a participação do seu educando nesta investigação, por favor, contacte o coordenador nacional do projeto:

Prof. Dr. João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa

Tel.: 21 794 37 77 Email: jpponte@ie.ulisboa.pt

Para alguma reclamação sobre esta investigação ou se pretender em qualquer momento anular o presente consentimento, entre em contato com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte (detalhes de contacto acima).

Nota importante
Este projeto, intitulado "Melhorar o ensino diferenciado e a ativação cognitiva em aulas de matemática através da formação de professores (EDUCATE)" foi financiado com o apoio da Comissão Europeia.

2

ULISBOA Instituto de Educação

Estudar o uso de tarefas desafiantes e de diferenciação pedagógica nas aulas de Matemática

Consentimento do(a) Encarregado(a) de Educação

Declaro que li e compreendi a descrição do projeto de investigação EDUCATE. Estou informado que a participação do meu educando é voluntária e autorizo a sua participação no projeto de investigação no ano letivo de 2018-2019. Tomei conhecimento que o nome do meu educando não irá aparecer em nenhuma publicação e que os dados registados em vídeo irão ser mantidos num arquivo seguro e serão usados apenas para propósitos da investigação e na formação de professores.

Finalmente, compreendo que, se tiver alguma questão sobre a investigação, poderei contactar o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Se em algum momento eu tiver quaisquer comentários sobre o projeto ou questões sobre os direitos do meu educando como participante no estudo, posso entrar em contato com a pessoa acima mencionada. Para além disso, compreendo que posso retirar o meu educando do estudo, em qualquer momento e sem qualquer consequência. Para tal, deverei entrar em contato com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Por favor, colocar um "X" na caixa abaixo; depois devolver esta página e manter as duas primeiras páginas para seu próprio registo:

☐ **Dou** o meu consentimento para o meu educando ser gravado em vídeo em algumas aulas de matemática e para o vídeo poder ser usado para investigação no âmbito do projeto EDUCATE.

☐ **Não dou** o meu consentimento para o meu educando ser gravado no âmbito do projeto EDUCATE.

Nome do aluno: ______________________________

Nome do Encarregado de Educação: ______________________________

Assinatura do Encarregado de Educação: ______________________________

Data: ____________________ Escola Secundária Pedro Alberto Neto, Queluz

Nome do Professor: ______________________________